Dr. Moritz Pasch

# Einführung in die Differential- und Integralrechnung

Verlag von B. G. Teubner
1882

# EINLEITUNG

IN DIE

# DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

DR. MORITZ PASCH,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU GIESSEN.



LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Druck von B. G. Teubner in Dresden

# Vorwort.

Die Principien der Differential- und Integralrechnung findet man, mit wenig Ausnahmen, unter denen in erster Linie das Werk von Lipschitz zu nennen ist, in den Lehrbüchern nicht mit der gegenwärtig erreichbaren Strenge* entwickelt. In akademischen Vorlesungen aber alle Einzelheiten vor Anfängern zu besprechen, ist nicht bloss sehr zeitraubend, sondern auch im allgemeinen von zweifelhaftem Erfolge, da der Lernende erst bei einer gewissen Reife des Urteils die grossenteils sehr abstrakten Auseinandersetzungen sich anzueignen und ihre Notwendigkeit einzusehen vermag. Nichtsdestoweniger muss man, glaube ich, bei dem Vortrage der Infinitesimalrechnung gleich von vornherein die älteren Darstellungsweisen verlassen, wenn man nicht in der Lage ist, auf die Principien jener Disciplin später, etwa bei der Einführung in die Funktionentheorie, ausführlich zurückkommen zu können.

Vielleicht wird daher für manche Zwecke eine Darstellung brauchbar sein, welche, wie die vorliegende, über die einleitenden Teile der Differential- und Integralrechnung nicht hinausgeht, ihren Gegenstand jedoch möglichst genau und ausführlich zu behandeln sucht. Die Schrift ist im Anschluss an Vorlesungen über Infinitesimalrechnung und Funktionentheorie (hauptsächlich im Wintersemester 1878/79) ausgearbeitet worden. Da sie nur als Ergänzung zu Vorlesungen oder Lehrbüchern dienen soll, wurde der Stoff entsprechend begrenzt; so blieben z. B. die Differentialquotienten

---

* Über die Möglichkeit einer rein arithmetischen Darstellung der Analysis vergl. die neuerlichen Bemerkungen von Cantor, Mathem. Ann. Bd. 20 S. 121.

höherer Ordnung ausser Betracht, ebenso die Anwendungen der Theorie; die Tangenten der ebenen Kurven, sowie Quadratur und Rektifikation sind nur herangezogen, um die Begriffsbildung zu erläutern. Für die trigonometrischen Funktionen kann die elementargeometrische Definition bei der analytischen Untersuchung nicht den Ausgangspunkt bilden; indem jene Funktionen aus dem Kreisbogenintegral erzeugt wurden, bot sich zugleich Gelegenheit, den Begriff des Integrationsweges zu erweitern und die Periodicität ohne Zuziehung von komplexen Variablen zu erklären. Zum Schluss werden die unendlichen Reihen, insbesondere die Potenzreihen besprochen und die Reihenentwickelungen der elementaren Funktionen gegeben.

Einige wesentliche Punkte in der Analysis haben erst durch vollkommenere Ausbildung des Begriffes der irrationalen Zahlen ihre Erledigung gefunden. Hinsichtlich dieses Begriffes bin ich, mit geringer Modifikation, der von Dedekind entwickelten Anschauungsweise gefolgt, welche am meisten der Natur der Sache entsprechen dürfte.

Giessen, im Mai 1882.

**M. Pasch.**

# Inhaltsverzeichnis.

# Einleitung

in die

# Differential- und Integral-Rechnung.

# Einleitung

in die

# Differential- und Integralrechnung.

## § 1. Einführung von Zahlenstrecken.

Eine strenge Begründung der Infinitesimalrechnung ist ohne genaue Erklärung des Wesens der irrationalen Zahlen nicht möglich. Die Einführung der irrationalen Zahlen setzt die der gebrochenen voraus, aber nicht notwendig die der negativen, sowie der Zahlen Null und Unendlich. Wir werden den Begriff der irrationalen Zahlen so entwickeln, wie er sich der Zahlenlehre an möglichst früher Stelle einfügen lässt.* Demgemäss soll das Wort „Zahl" bis auf weiteres stets eine positive ganze Zahl oder den Quotienten zweier positiven ganzen Zahlen bedeuten.

Soweit es innerhalb dieses Zahlengebietes möglich ist, müssen die Begriffe „gleich, grösser, kleiner, Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Potenz" nebst den darauf bezüglichen Benennungen, Bezeichnungen und Fundamentalsätzen bekannt sein. Wir können also die folgenden Hilfssätze aufstellen, in denen $n$ durchweg eine ganze Zahl bedeuten soll.

**1.** Zu jeder gegebenen Zahl $a$ kann man die Zahl $b$ so bestimmen, dass $b^n < a$.

Denn nimmt man $b$ zugleich $< 1$ und $< a$, so ist $b^n < b < a$.

**2.** Zu jeder gegebenen Zahl $a$ kann man die Zahl $g$ so bestimmen, dass $g^n > a$.

Denn nimmt man $g$ zugleich $> 1$ und $> a$, so ist $g^n > g > a$.

**3.** Sind $a$ und $u$ beliebige Zahlen, so kann man die Zahl $h$ so bestimmen, dass
$$h^n \leqq a, \quad (h+u)^n > a.$$

* Die nachstehende Einführung der irrationalen Zahlen beruht auf den Anschauungen, welche R. Dedekind in seiner Schrift: Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, entwickelt hat.

Wählt man nämlich die Zahl $b$ so, dass $b^n < a$, und bildet die Zahlen

$$b, \quad b+u, \quad b+2u, \quad b+3u, \quad \ldots,$$

so sei $b+\lambda u$ die erste Zahl der Reihe, deren $n^{\text{te}}$ Potenz den Wert $a$ überschreitet. Setzt man dann $b+(\lambda-1)u=h$, so besitzt $h$ die verlangten Eigenschaften.

4. Sind $a$ und $b$ beliebige Zahlen, so kann man stets eine Zahl $x$ angeben, deren $n^{\text{te}}$ Potenz zwischen $a$ und $b$ fällt.

Beweis: Es sei etwa $a<b$ und $b-a=d$. Man kann eine Zahl $g$ so wählen, dass $g^n > a$ wird, hierauf eine Zahl

$$u<1 \quad \text{und} \quad < \frac{d}{n(g+1)^{n-1}}$$

und endlich eine Zahl $h$ derart, dass $h^n \leqq a$, dagegen $(h+u)^n > a$ ausfällt. Bezeichnet man dann $h+u$ mit $x$, so wird

$$h<g, \quad h<x<g+u<g+1, \quad u<\frac{d}{nx^{n-1}},$$
$$x^n - h^n = (x-h)(x^{n-1}+x^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}) < u \,.\, n x^{n-1} < d,$$
$$a < x^n < h^n + d < a+d. \text{ —}$$

Wenn nun zu jeder Zahl $a$ Zahlen gehören, deren $n^{\text{te}}$ Potenz hinter $a$ zurückbleibt, und Zahlen, deren $n^{\text{te}}$ Potenz den Wert $a$ übersteigt, so lässt sich doch nicht immer eine Zahl auffinden, deren $n^{\text{te}}$ Potenz genau mit $a$ übereinstimmt. Wird die Zahl $a$ durch den Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ dargestellt, in welchem $\alpha$ und $\beta$ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler bedeuten sollen, so lässt sich zeigen, dass eine Zahl, deren $n^{\text{te}}$ Potenz gleich $a$ ist, nur dann existiert, wenn $\alpha$ und $\beta$ gleichzeitig $n^{\text{te}}$ Potenzen von ganzen Zahlen sind. Soll jede Zahl als $n^{\text{te}}$ Potenz einer anderen erscheinen, so ist eine Erweiterung des Zahlenbegriffes erforderlich.

Gehen wir in der Absicht, eine Zahl, deren $n^{\text{te}}$ Potenz gleich $a$ ist, aufzusuchen, alle Zahlen der Reihe nach durch, so begegnen wir zuerst einer ununterbrochenen Folge von Zahlen, welche sich als zu klein für jenen Zweck erweisen, indem sie, zur $n^{\text{ten}}$ Potenz erhoben, einen kleineren Wert als $a$ ergeben. Die Gruppe aller Zahlen, deren $n^{\text{te}}$ Potenz unter $a$ liegt, ist aber immer genau definiert, gleichviel ob $a$ sich als $n^{\text{te}}$ Potenz einer andern Zahl darstellen lässt oder nicht, und besitzt folgende Eigenschaften:

1. die Gruppe umfasst nicht alle Zahlen;

2. wenn die Zahl $x$ zur Gruppe gehört, so gehören zu ihr auch alle kleineren Zahlen;
3. es giebt keine grösste Zahl in der Gruppe.

Um die dritte Eigenschaft nachzuweisen, betrachte man irgend eine Zahl $x$ der Gruppe; da $x^n < a$, so kann man nach Satz 4. die Zahl $x_1$ so angeben, dass $x^n < x_1{}^n < a$; es ist dann $x_1$ zur Gruppe gehörig und grösser als $x$.

Wir wollen jede Zahlengruppe, welche diese drei Eigenschaften besitzt, eine Zahlenstrecke oder auch kurz eine Strecke nennen. Darnach wird z. B die Gesamtheit derjenigen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 25 ist, eine Zahlenstrecke heissen, ebenso die Gesamtheit derjenigen Zahlen, deren Kubus kleiner als 25 ist. Während es jedoch unter den Zahlen, welche von der ersteren Strecke ausgeschlossen werden, eine kleinste giebt, nämlich 5, ist dies bei der letzteren nicht der Fall; denn wenn $y$ nicht zur Strecke gehört, so lässt sich, da keine Zahl den Kubus 25 liefert und mithin $y^3 > 25$ ist, eine Zahl $y_1$ so angeben, dass $y^3 > y_1{}^3 > 25$, also $y_1$ ausserhalb der Strecke und kleiner als $y$. Wenn es unter den von einer Strecke ausgeschlossenen Zahlen eine kleinste $b$ giebt, d. h. wenn die Strecke alle Zahlen, welche kleiner als $b$ sind, und nur diese umfasst, so wollen wir sagen, die Strecke werde durch $b$ begrenzt, und eine solche Strecke eine Strecke mit Begrenzung oder auch eine rationale Strecke nennen. Die übrigen Zahlenstrecken, die Strecken ohne Begrenzung, nennen wir irrational.

Die Strecken werden im folgenden mit Buchstaben bezeichnet, wie die Zahlen. Ist ein Buchstabe $b$ das Zeichen einer Zahl, so gilt er zugleich als Zeichen der durch die Zahl $b$ begrenzten Strecke. Die Grundeigenschaften einer Zahlenstrecke sind in folgenden Bemerkungen ausgesprochen:

Gehört die Zahl $x$ zur Strecke $A$, und ist die Zahl $x_1 < x$, so gehört auch $x_1$ zur Strecke $A$.

Gehört die Zahl $x$ zu einer Strecke, die Zahl $y$ aber nicht, so ist $x < y$.

Gehört die Zahl $y$ nicht zur Strecke $A$, und ist die Zahl $y_1 > y$, so kann $y_1$ weder zur Strecke $A$ gehören, noch sie begrenzen.

Ist $x$ eine Zahl der Strecke $A$, so kann man immer eine Zahl $x_1$ angeben, welche grösser als $x$ und ebenfalls eine Zahl der Strecke $A$ ist.

Wenn die Zahl $y$ weder zur Strecke $A$ gehört, noch sie begrenzt, so kann man immer eine Zahl $y_1$ angeben, welche kleiner als $y$ ist und ebenfalls weder zur Strecke $A$ gehört, noch sie begrenzt.

*Ist eine Zahl $\varepsilon$ und eine Strecke $A$ gegeben, so kann man stets eine Zahl $x$ angeben, welche zur Strecke $A$ gehört, während die Zahl $x+\varepsilon$ weder zur Strecke $A$ gehört, noch sie begrenzt.* Versteht man nämlich unter $x_1$ eine beliebige Zahl der Strecke, und ist in der Reihe $x_1$, $x_1+\varepsilon$, $x_1+2\varepsilon$, ... die Zahl $x_1+\lambda\varepsilon$ die erste, welche nicht zur Strecke $A$ gehört, so wähle man für $x$ irgend eine Zahl, welche grösser als $x_1+(\lambda-1)\varepsilon$ ist und noch zur Strecke $A$ gehört.

Wenn sich herausstellt, dass zwei Zeichen $A$ und $B$ eine und dieselbe Strecke vorstellen, so sagen wir: Die Strecken $A$ und $B$ sind einander gleich, und schreiben:

$$A = B.$$

Sind jedoch die Strecken $A$ und $B$ verschieden, so wird in der einen, $A$, (mindestens) eine Zahl vorkommen, welche nicht zu andern, $B$, gehört; es wird dann $A$ die grössere, $B$ die kleinere Strecke heissen; die Strecke $A$ enthält alle Zahlen der Strecke $B$, aber zugleich noch (unendlich viele) andere Zahlen. Wir schreiben dann:

$$A > B, \quad B < A.$$

Hat man drei Strecken $A$, $B$, $C$ und ist $A > B$, $B > C$, so ist $A > C$. Wird die Strecke $A$ durch die Zahl $a$ begrenzt, so ist $A = a$. Ist $a$ eine Zahl der Strecke $A$, so ist $a < A$. Wenn die Zahl $a$ weder zur Strecke $A$ gehört noch sie begrenzt, so ist $a > A$. Wenn endlich $a$ und $b$ Zahlen bedeuten, so findet jede der Beziehungen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

zwischen den Zahlen $a$, $b$ gleichzeitig mit der nämlichen Beziehung zwischen den Strecken $a$, $b$ statt.

## § 2. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Zahlenstrecken.

Sind irgend zwei (gleiche oder ungleiche) Zahlenstrecken $A$ und $B$ gegeben, und nennt man $x$ eine beliebige Zahl der Strecke $A$, $y$ eine beliebige Zahl der Strecke $B$, $z$ die Summe $x+y$, dann bilden die Werte von $z$ eine Strecke. Denn wenn die Zahl $c$ nicht zur Strecke $A$, die Zahl $d$ nicht zur Strecke $B$ gehört, so ist immer $x < c$, $y < d$, $z < c+d$, d. h. $c+d$ gehört nicht zur Gruppe der Werte von $z$; betrachtet man ferner neben einem Werte von $z$ irgend eine kleinere Zahl $z_1$ und setzt

$$\frac{xz_1}{z} = x_1, \quad \frac{yz_1}{z} = y_1,$$

so ist $x_1 < x$, $y_1 < y$, $x_1 + y_1 = z_1$, d. h. $x_1$ gehört zu $A$, $y_1$ zu $B$, $z_1$ zur Gruppe; nimmt man endlich in der Strecke $A$ die Zahl $x' > x$ und bildet $x' + y = z'$, so gehört $z'$ zur Gruppe und ist grösser als $z$.

Für eine beliebige Anzahl von Zahlenstrecken $A_1 A_2 \ldots$ gilt dasselbe. Nennt man $x_1 x_2 \ldots$ beliebige Zahlen resp. aus den Strecken $A_1 A_2 \ldots$ und $z$ die Summe $x_1 + x_2 + \ldots$, so bilden die Werte von $z$ eine Strecke $C$. Wir nennen $C$ die S u m m e der S t r e c k e n $A_1 A_2 \ldots$ und schreiben:

$$C = A_1 + A_2 + \ldots$$

Dass wir dadurch nicht mit schon getroffenen Festsetzungen in Widerspruch gerathen, ist leicht zu erkennen. Sind nämlich die Strecken $A_1 A_2 \ldots$ sämtlich rational, also die Zeichen $A_1 A_2 \ldots$ zugleich Zeichen von Zahlen, und ist $C$ die Summe der Zahlen $A_1 A_2 \ldots$, so ist auch die rationale Strecke $C$ die Summe der Strecken $A_1 A_2 \ldots$; denn jede Zahl der Strecke $A_1 + A_2 + \ldots$ ist dann kleiner als die Zahl $C$, mithin zur Strecke $C$ gehörig; und ist umgekehrt $z$ irgend eine Zahl der Strecke $C$, also $z < C$ und

$$z = \frac{A_1 z}{C} + \frac{A_2 z}{C} + \ldots = x_1 + x_2 + \ldots,$$

wo $x_1 < A_1$, $x_2 < A_2$, ..., so gehört $z$ zur Strecke $A_1 + A_2 + \ldots$.

Es ist

$$A_1 + A_2 > A_1.$$

Denn wählt man in der Strecke $A_1$ die Zahl $x_1$ beliebig und hierauf in der Strecke $A_2$ die Zahl $x_2$ derart, dass $x_2 + x_1$ nicht zu $A_2$ gehört, so enthält die Strecke $A_1 + A_2$ die nicht zu $A_2$ gehörige Zahl $x_1 + x_2$. Weiter hat man

$$A_1 + B > A + B, \quad \text{wenn} \quad A_1 > A.$$

Wählt man nämlich die Zahlen $x$ und $x_1$ in der Strecke $A_1$, aber ausserhalb der Strecke $A$, und zwar $x_1 > x$, hierauf die Zahl $y$ in der Strecke $B$ derart, dass $y + (x_1 - x)$ nicht zu $B$ gehört, so ist $x_1 + y = x + (y + x_1 - x)$ eine Zahl der Strecke $A_1 + B$, aber nicht der Strecke $A + B$. Endlich ist

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1, \quad (A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + A_2 + A_3 \text{ u. s. w.}$$

Sind irgend zwei ungleiche Strecken $A$ und $B$ gegeben, $A > B$, und nennt man $x$ und $y$ irgend zwei Zahlen der Strecke $A$, aber ausserhalb $B$, $x > y$, so bilden die Werte der Differenz $z = x - y$ eine Strecke $C$. Denn wenn die Zahl $c$ nicht zu $A$ gehört, so ist $c > x > z$, d. h. $c$ gehört nicht zur Gruppe der Werte von $z$; betrachtet man ferner neben einem Werte von $z$ irgend eine Zahl $z_1 < z$, also auch $< x$, und setzt $x - z_1 = y_1$, so ist $x > y_1 > y$, folglich $y_1$ zur Strecke $A$ gehörig, aber nicht zu $B$, mithin $z_1 = x - y_1$ eine Zahl der Gruppe; ist endlich in der Strecke $A$ die Zahl $x' > x$, also nicht in $B$ gelegen, so ist $x' - y$ eine Zahl der Gruppe und grösser als $z$. Die Strecke $C$ ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, die Summe

$$B + C = A$$

hervorzubringen. Ist nämlich $u$ irgend eine Zahl der Strecke $B + C$, so hat man: $u = t + z = t + x - y$, wo $t$ eine Zahl von $B$, $z$ eine Zahl von $C$, $x$ und $y$ Zahlen von $A$, aber nicht von $B$, $x > y$, folglich $t < y$ und $u = x - (y - t) < x$, d. h. $u$ eine Zahl von $A$; ist umgekehrt $u$ irgend eine Zahl der Strecke $A$, wobei der Fall $u < B$ sich sofort erledigt und deshalb nur der Fall $B \leqq u$ noch in Betracht gezogen wird, und wählt man die Zahl $x > u$ in der Strecke $A$ (also $x$ nicht in $B$), hierauf die Zahl $y$ in der Strecke $B$ so, dass $y + (x - u) \geqq B$, so ist $y < u$, $y + (x - u) < x < A$, $x - (y + x - u) = u - y < C$, $u = y + (u - y) < B + C$. Keine andere Strecke ausser $C$ besitzt die erwähnte Eigenschaft. Denn ist die Strecke $C' \gtrless C$, so ist $B + C' \gtrless B + C$, $B + C'$ von $A$ verschieden.

Hiernach giebt es, wenn $A$ und $B$ ungleiche Strecken sind, $A > B$, eine und nur eine Strecke $C$ derart, dass $B + C = A$. Wir nennen $C$ die Differenz der Strecken $A$ und $B$ und schreiben:

$$C = A - B.$$

Sind die Strecken $A$ und $B$ rational und ist $C$ die Differenz der Zahlen $A$ und $B$, so ist auch die Strecke $C$ die Differenz der Strecken $A$ und $B$.

Wenn die Zahlenstrecken $A$ und $B$ wieder beliebig (gleich oder ungleich) angenommen werden, und man bildet aus einer beliebigen Zahl $x$ der Strecke $A$ und einer beliebigen Zahl $y$ der Strecke $B$ das Produkt $z = xy$, so bilden die Werte von $z$ eine Strecke. Denn liegt die Zahl $c$ ausserhalb von $A$, die Zahl $d$ ausserhalb von $B$, so ist immer $cd > z$, d. h. $cd$ gehört nicht zur Gruppe der Werte von $z$; nimmt man ferner $z_1 < z$ und setzt

$$\frac{x z_1}{z} = x_1,$$

so ist $x_1 < x < A$, $z_1 = x_1 y$, d. h. $z_1$ gehört zur Gruppe; nimmt man endlich in der Strecke $A$ die Zahl $x' > x$, so gehört $x'y$ zur Gruppe und ist grösser als $z$. Diese Bemerkung überträgt sich sofort auf beliebig viele Zahlenstrecken $A_1 A_2 \ldots$; die Werte des Produktes $x_1 x_2 \ldots$, wo $x_1$ eine Zahl von $A_1$, $x_2$ eine Zahl von $A_2$ u. s. w., bilden eine Strecke $C$, welche das Produkt der Strecken $A_1 A_2 \ldots$ heissen soll. Wir schreiben:

$$C = A_1 A_2 \ldots = A_1 . A_2 . \ldots = A_1 \times A_2 \times \ldots$$

Sind die Strecken $A_1 A_2 \ldots$ sämtlich rational, $C$ das Produkt der Zahlen $A_1 A_2 \ldots$, so ist auch die Strecke $C$ das Produkt der Strecken $A_1 A_2 \ldots$

Jede Strecke $A$ ist gleich dem Produkte der Strecken $A$ und 1. Denn jede Zahl der Strecke $A \times 1$ ist von der Form $xy$, wo $x$ eine Zahl von $A$ und $y < 1$, und kommt demnach in der Strecke $A$ vor; und ist umgekehrt $z$ irgend eine Zahl der Strecke $A$, so kann man in $A$ die Zahl $z' > z$ nehmen, so dass

$$z = z' \cdot \frac{z}{z'}$$

als Zahl der Strecke $A \times 1$ erscheint.

Aus drei Strecken $A$, $B$, $C$ bilde man die neuen Strecken

$$(A + B)\, C = F \quad \text{und} \quad AC + BC = G.$$

Jede Zahl von $F$ hat die Form $(x + y)\, z = xz + yz$, wo $x$ eine Zahl von $A$, $y$ eine Zahl von $B$, $z$ eine Zahl von $C$ bedeutet, und gehört mithin zu $G$. Jede Zahl von $G$ hat die Form

$$xz + yz_1 = \left(x + \frac{yz_1}{z}\right) z \quad \text{oder} \quad \left(\frac{xz}{z_1} + y\right) z_1,$$

wo $x$ eine Zahl von $A$, $y$ eine Zahl von $B$, $z$ und $z_1$ Zahlen von $C$ bedeuten, und gehört mithin zu $F$. Folglich ist

$$(A + B)\, C = AC + BC.$$

Man hat überdies:

$$A_1 B > AB \quad \text{für} \quad A_1 > A,$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_1, \quad (A_1 A_2)\, A_3 = A_1 A_2 A_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Einer Strecke $B$ kann man stets eine bestimmte Strecke $B'$ zuordnen, welche alle (und nur solche) Zahlen umfasst, deren reciproker Wert weder zur Strecke $B$ gehört, noch sie begrenzt. Jede Zahl der Strecke $BB'$ hat die Form $xy$, wo $x$ zu $B$ und $y$ zu $B'$ gehört, und ist $< 1$, da

$$x < B < \frac{1}{y}.$$

Jede Zahl der Strecke 1 hat die Form $1 - \varepsilon$, wo $\varepsilon < 1$; wählt man die Zahl $c$ in $B$ beliebig und hierauf in $B$ die Zahl $y$ so, dass $y + \varepsilon c$ weder zur Strecke $B$ gehört, noch sie begrenzt, so hat man:

$$c < y + \varepsilon c, \quad \varepsilon > \frac{\varepsilon c}{y + \varepsilon c},$$
$$1 - \varepsilon < y \cdot \frac{1}{y + \varepsilon c} < BB'.$$

Hiernach geben die beiden Strecken $B$ und $B'$ das Produkt 1. Bildet man daher mit einer beliebigen Strecke $A$ das Produkt $AB' = C$, so ist

$$BC = BAB' = ABB' = A \times 1 = A,$$

während jede von $C$ verschiedene Strecke, mit $B$ multipliciert, ein von $A$ verschiedenes Produkt hervorbringt.

Zu zwei beliebigen Strecken $A$ und $B$ gehört also stets eine und nur eine Strecke $C$ derart, dass $BC = A$. Wir nennen $C$ den Quotienten der Strecken $A$ und $B$ und schreiben:

$$C = \frac{A}{B} \quad \text{oder} \quad A:B.$$

Sind die Strecken $A$ und $B$ rational und ist $C$ der Quotient der Zahlen $A$ und $B$, so ist auch die Strecke $C$ der Quotient der Strecken $A$ und $B$.

Alle Ausdrücke, welche sich auf Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von Zahlen beziehen, können jetzt auf Zahlenstrecken übertragen werden, ebenso diejenigen Sätze, welche die Begriffe „gleich, grösser, kleiner" nur mit den eben erwähnten Begriffen in Verbindung bringen.

## § 3. Potenzierung und Radicierung von Zahlenstrecken; die irrationalen Zahlen.

Zufolge der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen können wir, wenn $n$ eine ganze Zahl bedeutet, von der $n^{\text{ten}}$ Potenz einer Strecke sprechen und auf solche Potenzen die Sätze anwenden, welche für die Potenzen von Zahlen gelten. Während sich aber nicht jede Zahl als $n^{\text{te}}$ Potenz einer anderen Zahl darstellen lässt, ist dies bei den Zahlenstrecken ohne Ausnahme der Fall.

Um letzteres einzusehen, betrachten wir irgend eine Strecke $A$ und bilden die Gruppe $B$ aller Zahlen, deren $n^{\text{te}}$ Potenz zu $A$ gehört. Nehmen wir die Zahl $c > 1$ und $> A$, so ist $c^n > c > A$, also $c$ nicht in der Gruppe $B$ enthalten; gehört die Zahl $x$ zur Gruppe und nimmt man $x_1 < x$, so ist $x_1^n < x^n < A$, also $x_1$ in der Gruppe enthalten; wählt man endlich in der Strecke $A$ die Zahl $b > x^n$, hierauf die Zahl $x'$ so, dass $x^n < x'^n < b < A$, dann gehört $x'$ zur Gruppe und ist grösser als $x$. Die Gruppe $B$ ist mithin eine Zahlenstrecke. Es sei nun $u$ eine beliebige Zahl der Strecke $B^n$, $v$ eine beliebige Zahl der Strecke $A$. Man hat dann:

$$u = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

wo $x_1 x_2 \ldots x_n$ Zahlen der Strecke $B$ bedeuten, deren grösste mit $x$ bezeichnet werde; da $x < B$, so wird

$$u < x^n < A,$$

d. h. $u$ gehört auch zu $A$. In $A$ kann man die Zahl $w > v$ annehmen und dann die Zahl $g$ so bestimmen, dass

$$v < g^n < w < A, \quad \text{also} \quad g < B;$$

es wird $v < g^n < B^n$, d. h. $v$ gehört auch zu $B^n$. Die Strecke $B^n$ fällt hiernach mit $A$ zusammen, aber keine von $B$ verschiedene Strecke wird, zur $n^{\text{ten}}$ Potenz erhoben, die Strecke $A$ erzeugen.

Es ist also in der That, wie immer die Strecke $A$ und die ganze Zahl $n$ gegeben sein mögen, stets eine und nur eine Strecke $B$ vorhanden, welche $B^n = A$ ergiebt. Wir nennen $B$ die $n^{\text{te}}$ Wurzel aus $A$, $n$ den Exponenten der Wurzel, und schreiben:

$$B = \sqrt[n]{A} \quad (\text{insbesondere } \sqrt[2]{A} = \sqrt{A}).$$

Sind dann $m$ und $n$ ganze Zahlen, $A$ und $A'$ beliebige Strecken, so gelten folgende Beziehungen:

$$\sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[1]{A} = A, \quad (\sqrt[n]{A})^n = A, \quad \sqrt[n]{A^n} = A,$$

$$\sqrt[n]{A}\,\sqrt[n]{A'} = \sqrt[n]{AA'}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}, \quad (\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m},$$

$$\sqrt[m]{A} < \sqrt[m+n]{A} \text{ bei } A < 1, \quad \sqrt[m]{A} > \sqrt[m+n]{A} \text{ bei } A > 1,$$

$$\sqrt[n]{A} < \sqrt[n]{A'} \text{ bei } A < A'.$$

Fasst man insbesondere die unter Zuziehung einer beliebigen ganzen Zahl $p$ sich ergebende Gleichung

$$\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[pn]{A^{pm}}$$

ins Auge, so erkennt man, dass (für ganze $m$, $n$, $\mu$, $\nu$)

$$\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[\nu]{A^\mu}, \quad \text{so oft} \quad \frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu},$$

dass also $\sqrt[n]{A^m}$ ausser von $A$ nur von dem Quotienten $\frac{m}{n}$ abhängt. Darauf gründet sich die Berechtigung, für $\sqrt[n]{A^m}$ eine Bezeichnung einzuführen, in welcher nur $A$ und $\frac{m}{n}$ auftreten. Ist $\lambda$ der Quotient der ganzen Zahlen $m$ und $n$, $l$ der reciproke Wert, so nennen wir $\sqrt[n]{A^m}$ die $\lambda^{\text{te}}$ Potenz von $A$, die Zahl oder die Strecke $\lambda$ den Exponenten der Potenz, auch wohl $\sqrt[n]{A^m}$ die $l^{\text{te}}$ Wurzel aus $A$, die Zahl oder die Strecke $l$ den Exponenten der Wurzel, und bedienen uns der Bezeichnungen

$$\sqrt[n]{A^m} = A^\lambda = \sqrt[l]{A} \text{ für } \lambda = \frac{m}{n}, \quad \lambda = \frac{n}{m}.$$

Die Begriffe „Potenz einer Strecke“ und „Wurzel aus einer Strecke“ sind somit auf beliebige Zahlen als Exponenten derart ausgedehnt, dass sie bei ganzzahligen Exponenten ihre ursprüngliche Bedeutung behalten. Auch die Regeln für die Rechnung mit Potenzen und Wurzeln bleiben giltig; insbesondere ist, wenn man unter $m$ und $n$ beliebige Zahlen, unter $A$ und $A'$ beliebige Strecken versteht:

$$1^n = 1, \quad \sqrt[n]{1} = 1, \quad \sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}, \quad (\sqrt[n]{A})^n = \sqrt[n]{A^n} = A,$$
$$A^n A'^n = (AA')^n, \quad A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn},$$
$$A^m > A^{m+n} \text{ bei } A < 1, \quad A^m < A^{m+n} \text{ bei } A > 1,$$
$$A^n < A'^n \text{ bei } A < A'.$$

Als Exponent kann jetzt jede rationale Strecke auftreten, aber keine irrationale. Um auch diese Lücke zu beseitigen, nehmen wir zwei beliebige Strecken $A$ und $B$, verstehen unter $x$ für $A \leqq 1$ alle Zahlen ausserhalb der Strecke $B$, für $A > 1$ alle Zahlen innerhalb der Strecke $B$ oder an deren Begrenzung, und bilden aus den Zahlen aller Strecken von der Form $A^x$ eine neue Strecke $C$. Für einen rationalen Wert von $B$ ist stets $C = A^B$; denn da alsdann die Strecke $A^B$ selbst die Form $A^x$ besitzt, so gehören alle ihre Zahlen zu $C$, und da zu jeder Zahl $u$ von $C$ eine Zahl $x \geqq B$ resp. $\leqq B$ existiert derart, dass $u < A^x \leqq A^B$, so gehört $u$ zu $A^B$. Nennt man also $C$ die $B^{\text{te}}$ Potenz von $A$, $B$ den Exponenten, und schreibt $C = A^B$, so kann man zu jeder Strecke jede andere als Potenzexponenten setzen, ohne für rationale Exponenten an der Bedeutung der Potenz etwas zu ändern. Es fragt sich aber, ob nach dieser Ausdehnung des Potenzbegriffes die Regeln für die Rechnung mit Potenzen immer anwendbar bleiben. Dass dies in der That der Fall ist, wird besser an einer späteren Stelle (§ 5) bewiesen werden. Hier sei nur noch bemerkt, dass

$$1^B = 1.$$

Es ist leicht, den Begriff der Wurzel entsprechend zu erweitern, jedoch dürfen wir davon als zwecklos absehen. —

Aus dem Vorstehenden erhellt schon zur Genüge, wie die Rechnung mit Strecken nicht bloss die Rechnung mit Zahlen vollständig umfasst, sondern zugleich über diese wesentlich hinausführt, indem sie die Umkehrung der Potenz mit ganzzahligem Exponenten und im Anschluss daran wieder neue Gebietsausdehnungen gestattet. Wenn wir daher die Rechnung mit Strecken weiter ausbilden, so wird einerseits in den gewonnenen Resultaten die Lehre von den Zahlen mit enthalten sein, indem jede Beziehung zwischen Zahlen sich auf die entsprechenden rationalen Strecken überträgt und umgekehrt; aber zugleich werden wir andrerseits eine vollkommenere, weniger durch Einschränkungen behinderte Theórie erhalten.

In dieser Theorie haben wir nirgends mehr nötig, das Wort Zahl zu gebrauchen, da wir statt der Zahl in allen Beziehungen die von ihr begrenzte Strecke einführen können; wir brauchen durchweg nur von Strecken zu sprechen und erforderlichenfalls rationale und irrationale Strecken zu unterscheiden. Ist so das Wort „Zahl" in seinem bisherigen Sinne entbehrlich geworden, so steht nichts im Wege, dasselbe Wort in einem neuen Sinne wieder einzuführen. Dies soll in der That geschehen, und zwar werden wir uns einfach des Wortes „Zahl" künftig statt „Strecke" und des letzteren Ausdrucks in seinem bisherigen Sinne gar nicht mehr bedienen. Eine Folge davon ist, dass überall, wo früher das Wort „Zahl" ohne Zusatz genügte, jetzt rationale Zahl stehen muss, während das Wort „Zahl" ohne Zusatz jetzt in einem weiteren Umfange als früher benutzt wird.

Die Definition der Strecke wird durch folgenden Satz künftig vertreten:

Wenn eine Gruppe von rationalen Zahlen $a$ so beschaffen ist, dass 1) nicht alle rationalen Zahlen zu ihr gehören, 2) jede unter einem $a$ gelegene rationale Zahl selbst ein $a$ und 3) kein $a$ das grösste ist, so existiert eine und nur eine Zahl $A$, welche alle $a$ übertrifft, während jede unter $A$ gelegene rationale Zahl selbst zu den $a$ gehört.

Ferner wird der die Definition der „grösseren" und „kleineren" Strecke vertretende Satz gebraucht:

Ist die Zahl $b$ kleiner als die Zahl $c$, so giebt es rationale Zahlen $a$ derart, dass $b < a < c$.

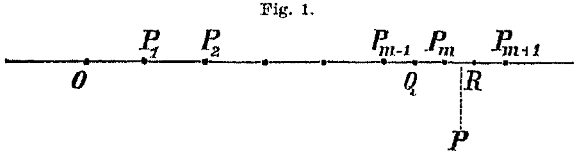
Man überzeugt sich leicht, dass im vorigen Satze das Wort „rational" fortbleiben darf, dass also auch der folgende Satz gilt:

Wenn eine Gruppe von Zahlen $a$, welche nicht alle Zahlen umfasst, so beschaffen ist, dass jede unter einem $a$ gelegene Zahl selbst ein $a$ ist, so wird dadurch eine Zahl $A$ bestimmt derart, dass kein $a$ die Zahl $A$ übertrifft, und dass alle unter $A$ gelegenen Zahlen zu den $a$ gehören.

Zum Beweise bildet man eine Gruppe von rationalen Zahlen $a'$, indem man aus der Gruppe der Zahlen $a$ alle irrationalen und, wenn ein $a$ das grösste ist, auch dieses fortlässt.

Um die Zweckmässigkeit der neuen Begriffsbildung an einem geometrischen Beispiel erläutern zu können, ist es nötig, auf die Anwendung der Zahlen zur Messung in der geraden Linie überhaupt näher einzugehen. Da bei der Messung Teile des Maasses in Betracht kommen können, so muss feststehen, welcher aliquote Teil des Maasses zuletzt noch berücksichtigt werden kann oder soll; dieser Teil sei etwa der $n^{te}$. Trägt man nun, um den geraden Weg von $O$ bis $P$ zu messen, auf $OP$ den $n^{ten}$ Teil des Maasses etwa von $O$ aus wiederholt auf, so dass eine Reihe von Punkten $P_1 P_2 \ldots$ entsteht, und ist unter diesen $P_m$ der dem Punkte $P$ zunächstliegende, so nennt man die Zahl $\frac{m}{n}$ die Länge von $OP$; wenn $P$ zwischen zwei Punkten $P_\mu$ und $P_{\mu+1}$ in der Mitte liegt, so mag man nach Belieben $m = \mu$ oder $m = \mu + 1$ nehmen. Aus der Zahl $\frac{m}{n}$ ist allerdings, wenn der Punkt $O$ und die Richtung von $OP$ gegeben ist, der Punkt $P$ nicht mit voller Bestimmtheit wieder herzustellen; vielmehr können, wenn man in der Geraden $OP_1$ die beiden Punkte $Q$ und $R$ aufsucht, welche von $P_m$ um die Hälfte von $OP_1$ abstehen (etwa $Q$ zwischen $O$ und $R$), alle Punkte zwischen $Q$ und $R$ der Zahl $\frac{m}{n}$ entsprechen.

Fig. 1.




Diese Unbestimmtheit war jedoch durch die zu Grunde gelegte Genauigkeitsgrenze von vornherein bedingt; es wird eben unter der gemachten Voraussetzung zwischen den Strecken, welche von $O$ ausgehen und zwischen $Q$ und $R$ endigen, kein Unterschied gemacht.

Hiermit steht es in Zusammenhang, dass, solange $n$ festgehalten wird, jede Zahl $a$ zwischen

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{2n} \text{ und } \frac{m}{n} + \frac{1}{2n}$$

bei der Rechnung in gewissem Sinne dieselben Dienste leistet, wie $\frac{m}{n}$ selbst. Zwar zieht die Änderung der Zahl $\frac{m}{n}$ eine Änderung des Rechnungsresultates nach sich; allein die Änderungen von $\frac{m}{n}$, welche zwischen den angegebenen Grenzen vor sich gehen, entsprechen den Schwankungen des Punktes $P$ zwischen $Q$ und $R$, und die Wirkung dieser Schwankungen muss, wie die Schwankungen selbst, von der Berücksichtigung ausgeschlossen bleiben. Wir dürfen daher, ohne einen unstatthaften Fehler zu veranlassen, irgend eine der Zahlen $a$ für die Länge der Strecke $OP$ nehmen.*

Während die empirische Messung eine mit der Genauigkeitsgrenze sich ändernde Zahl ergiebt, sucht die Mathematik allgemeingiltige, von besonderen Beobachtungsverhältnissen unabhängige Regeln auf; dabei kann sie aber der irrationalen Zahlen nicht entbehren, wenn sie sich nicht auf ein ganz enges Gebiet beschränken will. Das einfachste hierher gehörige Beispiel aus der Geometrie ist die Aufgabe, die Länge der Diagonale $OP$ des über der Längeneinheit errichteten Quadrats zu berechnen. Das Quadrat über $OP$ enthält zwei Flächeneinheiten; behalten wir die Buchstaben $n$, $m$, $Q$, $R$, $a$ in ihrer bisherigen Bedeutung bei, so enthält das Quadrat über $OQ$ weniger, das über $OR$ mehr als zwei Flächeneinheiten. Es ist also

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{2n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{2n}\right)^2,$$

folglich

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{2n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n} + \frac{1}{2n},$$

d. h. $\sqrt{2}$ ist eine Zahl $a$. Nennen wir demgemäss $\sqrt{2}$ die Länge der Geraden $OP$ und schreiben

$$OP = \sqrt{2},$$

so haben wir die gesuchte Grösse auf eine unter allen Umständen brauchbare Weise ausgedrückt. Bei der einzelnen Anwendung wird die innezuhaltende Genauigkeit durch einen bestimmten Wert von $n$ repräsentiert werden, und wenn man die von $\sqrt{2}$ am wenigsten differierende Zahl der Reihe

---

* Vergl. des Verf. „Vorlesungen über neuere Geometrie“ (Leipzig 1882) § 23.

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$$

aufsucht, so gelangt man genau zu derselben Zahl $\frac{m}{n}$, zu welcher die Messung führen würde. Da man aber statt dieser rationalen Zahl bei der weiteren Rechnung die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ verwenden darf, so überhebt uns die obige Formel der Notwendigkeit, die Genauigkeitsgrenze des besonderen Falles zu kennen.

## § 4. Untere und obere Grenze.

Nach Einführung der irrationalen Zahlen hat man die der negativen Zahlen, sowie der Zahlen Null und Unendlich vorzunehmen und die Rechnungsregeln entsprechend zu erweitern, worauf hier nicht besonders eingegangen werden soll. Über das so gewonnene Zahlengebiet wollen wir aber nicht hinausgehen; es bleiben also die imaginären Zahlen von der Betrachtung ausgeschlossen, und das Wort „Zahl" wird im folgenden immer eine reelle Zahl bedeuten. Der absolute Betrag einer Zahl $a$ werde mit abs $a$ bezeichnet. Man hat:

$$\operatorname{abs}(a+b) \leqq \operatorname{abs} a + \operatorname{abs} b, \quad \operatorname{abs}(a+b) \geqq \operatorname{abs}(\operatorname{abs} a - \operatorname{abs} b),$$

$$\operatorname{abs}(ab) = \operatorname{abs} a \,.\, \operatorname{abs} b, \quad \operatorname{abs}\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{abs} a}{\operatorname{abs} b},$$

$$\operatorname{abs} a^n = (\operatorname{abs} a)^n,$$

zunächst nur für rationale $n$, und bei negativem $a$ nur sofern $a^n$ reell ist.

Ich nenne eine Gruppe von Zahlen nach oben begrenzt, wenn sich eine Zahl angeben lässt, über welche keine Zahl der Gruppe hinausgeht. Ich nenne die Gruppe nach oben unbegrenzt, wenn zu jeder beliebigen Zahl sich eine grössere Zahl in der Gruppe vorfindet. Man sagt dann auch: Die Zahlen der Gruppe können beliebig gross werden. — Eine Gruppe von Zahlen heisst nach unten begrenzt, wenn sich eine Zahl angeben lässt, unter welche keine Zahl der Gruppe sinkt. Die Gruppe heisst nach unten unbegrenzt, wenn zu jeder beliebigen Zahl sich eine kleinere Zahl in der Gruppe vorfindet. Man sagt dann auch: Die Zahlen der Gruppe können beliebig klein werden.

Eine Gruppe von Zahlen heisst eine stetige Folge (ein Continuum), wenn jede zwischen zwei Zahlen der Gruppe gelegene Zahl selbst zur Gruppe gehört. Die Gesamtheit aller Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ ist eine stetige Folge (die „stetige Zahlenreihe").

Wenn gesagt wird: Die Zahl $x$ befindet sich in gewisser Nähe des Wertes $\alpha$, so hat man zu unterscheiden, ob $\alpha$ endlich oder unendlich ist. Wenn $\alpha$ endlich ist, so wird gefordert, dass $x$ von $\alpha$ in der einen oder in der anderen Richtung einen Abstand besitzt, der eine bestimmte positive Zahl $\varepsilon$ nicht erreicht, d. h. dass

$$\alpha-\varepsilon<x<\alpha+\varepsilon, \quad \text{abs}\,(x-\alpha)<\varepsilon.$$

Wenn $\alpha=\infty$ ist, so wird gefordert, dass $x$ von der Null in der einen oder in der anderen Richtung eine Entfernung hat, welche eine bestimmte positive Zahl $\varrho$ übertrifft, d. h. dass

$$x>\varrho \text{ oder } <-\varrho, \quad \text{abs}\, x>\varrho,$$

oder wenn wir diesmal unter $\varepsilon$ den reciproken Wert von $\varrho$ verstehen:

$$-\varepsilon<\frac{1}{x}<\varepsilon, \quad \text{abs}\,\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

Endlich kann $\alpha$ „bestimmt“ unendlich sein, d. h. entweder $+\infty$ oder $-\infty$. Ist $\alpha=+\infty$, so wird gefordert, dass

$$x>\varrho \text{ oder } 0<\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

Ist $\alpha=-\infty$, so wird gefordert, dass

$$x<-\varrho \text{ oder } -\varepsilon<\frac{1}{x}<0.$$

Wir sind jetzt in der Lage, den folgenden Fundamentalsatz aufzustellen:

Wenn unendlich viele Zahlen $a$ eine stetige, nach oben begrenzte, nach unten unbegrenzte Folge bilden, so wird durch sie eine endliche Zahl $A$ bestimmt derart, dass keine der Zahlen $a$ über $A$ liegt, dass aber alle unter $A$ gelegenen Zahlen zu den $a$ gehören.

Beweis: Der Voraussetzung nach gehört zu den $a$ zwar nicht jede beliebige, aber doch jede unter einem $a$ gelegene Zahl. Ist $\alpha$ grösser als der absolute Betrag eines $a$ und bildet man die Summen $a'=a+\alpha$, so hat die Gruppe der $a'$ denselben Charakter und enthält überdies sicher positive Zahlen. Durch die positiven $a'$ wird aber (§ 3 Seite 11) eine Zahl $A'$ bestimmt derart, dass kein positives $a'$ (also überhaupt kein $a'$) die Zahl $A'$ übertrifft, und dass alle unter $A'$ gelegenen positiven Zahlen (also überhaupt alle unter $A'$ gelegenen Zahlen) zu den $a'$ gehören. Nimmt man $A=A'-\alpha$, so gilt von $A$ die Behauptung.

Ebenso besteht der Satz:

Wenn unendlich viele Zahlen $a$ eine stetige, nach unten begrenzte, nach oben unbegrenzte Folge bilden, so wird durch sie eine endliche Zahl $A$ bestimmt derart, dass keine der Zahlen $a$ unter $A$ liegt, dass aber alle über $A$ gelegenen Zahlen zu den $a$ gehören.

Setzt man nämlich $-a = a'$, so erfüllen die Zahlen $a'$ die Voraussetzung des vorigen Satzes.

Es seien jetzt Zahlen $a$ nach irgend einem Gesetz, in endlicher oder in unendlich grosser Menge, in stetiger Folge oder nicht in stetiger Folge gegeben. Nennen wir $a'$ jede Zahl, zu welcher sich unter den $a$ eine kleinere oder gleiche vorfindet. Ist die Gruppe der $a$ nach unten begrenzt, so bilden die $a'$ eine stetige, nach unten begrenzte, nach oben unbegrenzte Folge, durch welche eine endliche Zahl $\alpha$ bestimmt wird derart, dass kein $a'$ unter $\alpha$ liegt, dass aber alle über $\alpha$ gelegenen Zahlen zu den $a'$ gehören. Es sind dann alle $a \geqq \alpha$, aber zugleich liegt in jeder Nähe von $\alpha$ mindestens eine Zahl $a$, d. h. wie klein auch die positive Zahl $\varepsilon$ angenommen werde, so liegt immer mindestens eine Zahl $a$ zwischen $\alpha - \varepsilon$ und $\alpha + \varepsilon$ (also entweder in $\alpha$ oder zwischen $\alpha$ und $\alpha + \varepsilon$), weil sonst alle $a \geqq \alpha + \varepsilon$ wären, mithin auch alle $a'$. Man nennt $\alpha$ nach Weierstrass die untere Grenze der Zahlen $a$. Können die Zahlen $a$ beliebig klein werden, so sagt man, sie haben die untere Grenze $-\infty$. Keine Zahl $a$ ist kleiner als die untere Grenze, aber in jeder Nähe der unteren Grenze findet sich mindestens eine Zahl $a$ vor. Die untere Grenze wird durch diese Eigenschaften vollkommen bestimmt. Ist unter den Zahlen $a$ eine die kleinste, so ist sie zugleich untere Grenze. Ist die untere Grenze selbst eine Zahl $a$, so ist sie die kleinste der Zahlen $a$. Bei einer endlichen Zahlenmenge ist die untere Grenze allemal zugleich die kleinste Zahl.

Die untere Grenze ist die grösste derjenigen Zahlen, unterhalb deren sich kein $a$ vorfindet. Die untere Grenze ändert sich nicht, wenn man irgend welche Zahlen $> \alpha$ hinzufügt.

Die Zahlen $-a$ haben eine untere Grenze, deren entgegengesetzter Wert $\beta$ nach Weierstrass die obere Grenze der Zahlen $a$ genannt wird. Die obere Grenze der Zahlen $a$ ist endlich, wenn die $a$ nicht beliebig gross werden können, sonst ist sie $+\infty$. Keine Zahl $a$ ist grösser als die obere Grenze, aber in jeder Nähe der oberen Grenze befindet sich wenigstens eine Zahl $a$. Die obere Grenze wird durch diese Eigenschaften vollständig bestimmt. Ist von den Zahlen $a$ eine die grösste, so ist sie zugleich obere Grenze. Ist die obere Grenze selbst eine Zahl $a$, so ist sie zugleich die grösste der Zahlen $a$. Bei einer endlichen Zahlenmenge ist die obere Grenze allemal zugleich die grösste Zahl.

Die obere Grenze ist die kleinste derjenigen Zahlen, welche von keinem $a$ übertroffen werden. Die obere Grenze ändert sich nicht, wenn man irgendwelche Zahlen $\leq \beta$ hinzufügt.

Alle Zahlen der Gruppe, abgesehen eventuell von der kleinsten und der grössten, liegen zwischen $\alpha$ und $\beta$; und wenn die $a$ irgend einer bestimmten Grösse $m$ beliebig nahe kommen können, so ist $\alpha < m < \beta$. Beide Grenzen bleiben ungeändert, wenn man irgendwelche Zahlen, die $> \alpha$ und $< \beta$ sind, hinzufügt, d. h. irgendwelche Zahlen, die sich zwischen zwei Zahlen $a$ einschliessen lassen.

Ist $\alpha$ die untere, $\beta$ die obere Grenze einer stetigen Folge, so gehört jede zwischen $\alpha$ und $\beta$ gelegene Zahl der Folge an, aber nicht notwendig $\alpha$ und $\beta$ selbst.

Ist $\alpha$ die untere, $\beta$ die obere Grenze der Zahlen $a$, so ist $\beta - \alpha$ positiv. Nimmt man $a_1$ und $a_2$ unter den Zahlen $a$ beliebig, $a_2 > a_1$, so können die Differenzen $a_2 - a_1$ dem Werte $\beta - \alpha$ beliebig nahe kommen, ohne ihn je zu überschreiten. Die Zahl $\beta - \alpha$, welche somit die obere Grenze aller Differenzen $a_2 - a_1$ bildet, werde die Schwankung* der Zahlen $a$ genannt. Wenn ich einen Teil der $a$ fortlasse, so nimmt die untere Grenze nicht ab, die obere Grenze und die Schwankung nehmen nicht zu.

Wenn $\alpha$ und $\beta$ dem Betrage nach übereinstimmen, so haben die Beträge der $a$ die obere Grenze $\text{abs}\,\alpha = \text{abs}\,\beta$. Wenn $\text{abs}\,\alpha$ und $\text{abs}\,\beta$ nicht übereinstimmen, so ist die grössere dieser beiden Zahlen die obere Grenze der Beträge der $a$. Sind z. B. sämtliche $a < 0$, so ist $\text{abs}\,\alpha > \text{abs}\,\beta$, $\text{abs}\,\alpha$ die obere Grenze der $\text{abs}\,a$, zugleich $\text{abs}\,\beta$ ihre untere Grenze.

Die untere Grenze der Zahlen $-a$ ist $-\beta$, die obere $-\alpha$. Haben alle $a$ dasselbe Vorzeichen, so ist $\frac{1}{\beta}$ die untere, $\frac{1}{\alpha}$ die obere Grenze der Zahlen $\frac{1}{a}$.

Sind noch Zahlen $a'$ mit der unteren Grenze $\alpha'$, der oberen Grenze $\beta'$ gegeben, so ist $\alpha + \alpha'$ die untere, $\beta + \beta'$ die obere Grenze der Zahlen $a + a'$; bedeutet nämlich $A$ nicht bloss jede Zahl $a$, sondern auch jede beliebige Zahl zwischen $\alpha$ und $\beta$, ebenso $A'$ nicht bloss jede Zahl $a'$, sondern auch jede beliebige Zahl zwischen $\alpha'$

* Riemann, Gesammelte Werke S. 226; Lüroth, Mathem. Ann. Bd. 6 S. 319.

und $\beta'$, so bewegt sich die Summe $A + A'$ zwischen denselben Grenzen, wie die Summe $\alpha + \alpha'$. Sind alle $\alpha$ und $\alpha'$ positiv, so ist $\alpha\alpha'$ die untere, $\beta\beta'$ die obere Grenze der Zahlen $aa'$; denn das Produkt $AA'$ bewegt sich zwischen denselben Grenzen, wie das Produkt $aa'$.

## § 5. Potenzen und Logarithmen.

Wir kommen jetzt auf die Potenz in der im dritten Paragraphen erzielten Allgemeinheit zurück. Als Grundzahlen und Exponenten sind danach zunächst nur positive endliche Zahlen zulässig, und die Werte der Potenzen sind zunächst immer positiv zu nehmen. Indem wir eine positive endliche Zahl $m$ einführen, bestimmen wir zugleich, dass

$m_1$ jede positive rationale Zahl $< m$,
$m_2$ jede rationale Zahl $> m$,
$\mu_1$ jede positive rationale Zahl $< m$,
$\mu_2$ jede rationale Zahl $\geq m$

bedeuten soll. Von den folgenden Sätzen dient der erste als Hilfssatz bei den späteren Beweisen.

**1.** *Ist die positive Zahl $x$ beliebig und $A > 1$ gegeben, so kann man die positive ganze Zahl $r$ so bestimmen, dass $A^r > x$.**

Nimmt man in der That die positive ganze Zahl

$$r > \frac{x-1}{A-1},$$

so wird

$$A^r - 1 = (A^{r-1} + A^{r-2} + \ldots + A + 1)(A-1) > r(A-1) > x - 1.$$

**2.** Für $0 < A < 1$ ist $A^m$ obere Grenze der Zahlen $A^{m_2}$ und der Zahlen $A^{\mu_2}$, zugleich untere Grenze der Zahlen $A^{m_1}$ und der Zahlen $A^{\mu_1}$.

Beweis: Versteht man unter $b$ jede positive rationale Zahl, welche kleiner ist als eine der Zahlen $A^{\mu_2}$, so ist $A^m$ zufolge der in § 3 gegebenen Erklärung die obere Grenze der $b$, und es ist

$$A^{\mu_2} < A^m,$$

weil man sonst (§ 3 Seite 11) eine positive rationale Zahl zwischen $A^m$ und $^{\mu_2}$ angeben könnte, also eine über $A^m$ gelegene Zahl $b$. Daher ist $A^m$ obere Grenze der $A^{\mu_2}$, d. h. die $b$ und die $A^{\mu_2}$ haben eine und dieselbe obere Grenze, nämlich die obere Grenze der die $b$

* Folglich auch die positive ganze Zahl $s$ so, dass $(1+x)^s > A$ und mithin $A^{\frac{1}{s}} < 1 + x$.

und die $A^{\mu_2}$ zugleich umfassenden Zahlengruppe; und man bemerkt, dass stets

$$A^m < A^{m_1},$$

weil man sonst ein $\mu_2$ wählen könnte, für welches

$$A^{m_1} \leq A^{\mu_2} < A^m,$$

während doch $A^{\mu_2} < A^{m_1}$ sein muss wegen $\mu_2 > m_1$.

Die Potenz $A^m$ ist grösser als alle Potenzen $A^{m_2}$; denn man kann stets ein $\mu_2$ zwischen $m$ und $m_2$ wählen und hat dann:

$$A^m > A^{\mu_2} > A^{m_2}.$$

Nimmt man aber die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig, so kann man stets ein $A^{m_2}$ zwischen $A^m - \varepsilon$ und $A^m$ einschieben; denn wählt man die positive Zahl $u$ zwischen $A^m - \varepsilon$ und $A^m$ beliebig, hierauf die positive ganze Zahl $r$ so, dass

$$\left(\frac{A^m}{u}\right)^r > \frac{1}{A}, \quad \text{wo} \quad \frac{A^m}{u} > 1,$$

und endlich irgend ein $m_1$ zwischen $m - \frac{1}{r}$ und $m$, so darf man $m_1 + \frac{1}{r}$ mit $m_2$ bezeichnen und erhält:

$$\frac{A^m}{u} > \sqrt[r]{\frac{1}{A}}, \quad A^m \cdot \sqrt[r]{A} > u, \quad A^{m_1} > A^m,$$

$$A^{m_2} = A^{m_1 + \frac{1}{r}} = A^{m_1} A^{\frac{1}{r}} > A^m A^{\frac{1}{r}} > u,$$

$$A^m - \varepsilon < u < A^{m_2} < A^m.$$

Folglich ist $A^m$ obere Grenze der $A^{m_2}$, welche kein Maximum besitzen.

Die Potenz $A^m$ ist kleiner als alle Potenzen $A^{m_1}$. Nimmt man aber die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig, so kann man stets ein $A^{m_1}$ zwischen $A^m$ und $A^m + \varepsilon$ einschieben; denn wählt man die positive ganze Zahl $r$ so, dass

$$\left(\frac{A^m + \varepsilon}{A^m}\right)^r > \frac{1}{A}, \quad \text{also} \quad A^m + \varepsilon > \frac{A^m}{\sqrt[r]{A}},$$

und hierauf irgend ein $m_1$ zwischen $m - \frac{1}{r}$ und $m$, so darf man wie vorhin $m_1 + \frac{1}{r}$ mit $m_2$ bezeichnen und erhält:

$$A^{m_1} A^{\frac{1}{r}} = A^{m_2} < A^m, \quad A^{m_1} < \frac{A^m}{A^{\frac{1}{r}}} < A^m + \varepsilon.$$

Folglich ist $A^m$ untere Grenze der $A^{m_1}$, welche kein Minimum besitzen; und die untere Grenze der $A^{\mu_1}$ ist von der der $A^{m_1}$ nicht verschieden.

**3.** Sind $A$ und $B$ positive Zahlen, deren Produkt $AB = 1$, so ist

$$A^m B^m = 1.$$

Beweis: Der Fall $A = B = 1$ bedarf keiner besonderen Erörterung; es wird sich nur um den Fall handeln, wo der eine Faktor kleiner als Eins ist, etwa $A$, der andere $B$ grösser als Eins. Versteht man unter $c$ jede positive rationale Zahl, welche kleiner ist als eine der Zahlen $B^{\mu_1}$, so ist $B^m$ zufolge der in § 3 gegebenen Erklärung die obere Grenze der $c$, $B^{\mu_1} > B^m$, $B^m$ die obere Grenze der $B^{\mu_1}$. Demnach ist

$$\frac{1}{B^m} \text{ untere Grenze der Zahlen } \frac{1}{B^{\mu_1}} = \left(\frac{1}{B}\right)^{\mu_1} = A^{\mu_1},$$

d. h. nach dem vorigen Satze:

$$\frac{1}{B^m} = A^m.$$

**4.** Für $A > 1$ ist $A^m$ obere Grenze der Zahlen $A^{m_1}$ und der Zahlen $A^{\mu_1}$, zugleich untere Grenze der Zahlen $A^{m_2}$ und der Zahlen $A^{\mu_2}$.

Beweis: Nennt man $B$ den reciproken Wert von $A$, so ist

$$0 < B < 1, \quad A^m = \frac{1}{B^m},$$

$$A^{m_1} = \frac{1}{B^{m_1}}, \quad A^{\mu_1} = \frac{1}{B^{\mu_1}}, \quad A^{m_2} = \frac{1}{B^{m_2}}, \quad A^{\mu_2} = \frac{1}{B^{\mu_2}}.$$

Nach dem zweiten Satze ist $B^m$ obere Grenze der $B^{m_2}$ und der $B^{\mu_2}$, untere Grenze der $B^{m_1}$ und der $B^{\mu_1}$; die $B^{m_2}$ besitzen kein Maximum, die $B^{m_1}$ kein Minimum. Folglich ist $A^m$ untere Grenze der $A^{m_2}$ und der $A^{\mu_2}$, obere Grenze der $A^{m_1}$ und der $A^{\mu_1}$; die $A^{m_2}$ besitzen kein Minimum, die $A^{m_1}$ kein Maximum.

Wird noch eine positive Zahl $n$ eingeführt, so gilt der Satz:

**5.** *Bei* $0 < A < 1$ *ist*

$$A^m < 1, \quad A^m > A^{m+n};$$

*bei* $A > 1$ *ist*

$$A^m > 1, \quad A^m < A^{m+n}.$$

Denn nimmt man die positive rationale Zahl $s < m$, die rationale Zahl $t$ zwischen $m$ und $m + n$, so ist

$$1 > A^s > A^m > A^t > A^{m+n} \text{ bei } 0 < A < 1,$$
$$1 < A^s < A^m < A^t < A^{m+n} \text{ bei } A > 1.$$

6. *Bedeutet $\mu$ jede positive Zahl $< m$, $\mu'$ jede Zahl $> m$, so ist $A^m$ bei $0 < A < 1$ obere Grenze der $A^{\mu'}$ und untere Grenze der $A^{\mu}$; dagegen ist $A^m$ bei $A > 1$ obere Grenze der $A^{\mu}$ und untere der $A^{\mu'}$.**

Beweis: Nehmen wir zuerst $0 < A < 1$. Es ist dann $A^m$ obere Grenze der $A^{m_1}$, also auch der $A^{\mu'}$, weil alle $A^{m_2}$ zu den $A^{\mu'}$ gehören und $A^{\mu'} < A^m$ nach dem vorigen Satze; ebenso ist dann $A^m$ untere Grenze der $A^{m_1}$, also auch der $A^{\mu}$, weil alle $A^{m_1}$ zu den $A^{\mu}$ gehören und $A^{\mu} > A^m$. U. s. w.

Der Satz bleibt richtig, wenn $\mu$ jede positive Zahl $< m$ oder $\mu'$ jede Zahl $> m$ bedeutet.

7. Sind $A$, $B$, $C$ positive Zahlen, deren Produkt $ABC = 1$, so ist

$$A^m B^m C^m = 1.$$

Beweis: In Rücksicht auf Satz 3. können wir von dem Falle absehen, wo eine der drei Zahlen $A$, $B$, $C$ der Einheit gleich ist. Nehmen wir nun zuerst an, dass eine von ihnen die Eins übertrifft, etwa $C$, während die beiden andern kleiner als Eins sind, so haben wir:

$$AB = \frac{1}{C} < 1, \quad A^{m_2} B^{m_2} = \left(\frac{1}{C}\right)^{m_2};$$

es ist dann $A^m$ obere Grenze der $A^{m_2}$, $B^m$ obere Grenze der $B^{m_2}$, folglich $A^m B^m$ obere Grenze der $A^{m_2} B^{m_2}$, andererseits

$$\left(\frac{1}{C}\right)^m \text{ d. i. } \frac{1}{C^m}$$

obere Grenze der $A^{m_2} B^{m_2}$, folglich

$$A^m B^m = \frac{1}{C^m}.$$

Nehmen wir zweitens an, dass zwei von den Zahlen $A$, $B$, $C$ die Eins übertreffen, etwa $A$ und $B$, während die dritte kleiner als Eins ist, so haben wir:

$$AB = \frac{1}{C} > 1, \quad A^{m_1} B^{m_1} = \left(\frac{1}{C}\right)^{m_1}$$

u. s. w.

8. *Sind $A$ und $B$ positive Zahlen, so ist*

$$A^m B^m = (AB)^m, \quad \frac{A^m}{B^m} = \left(\frac{A}{B}\right)^m.$$

---

* Bei $A > 1$ ist 1 die untere Grenze aller $A^m$ (vergl. Satz 1, Anmerkung); bei $0 < A < 1$ ist 1 die obere Grenze aller $A^m$.

Denn wenn man den reciproken Wert von $AB$ mit $C$ bezeichnet, so wird

$$ABC = 1, \quad \text{folglich} \quad A^m B^m C^m = 1,$$

$$A^m B^m = \frac{1}{C^m} = \left(\frac{1}{C}\right)^m = (AB)^m,$$

ebenso

$$\left(\frac{A}{B}\right)^m B^m = \left(\frac{A}{B} \cdot B\right)^m = A^m.$$

**9.** *Sind $A$ und $B$ positive Zahlen, so ist*

$$A^m < B^m \quad \text{für} \quad A < B.$$

Denn für $A < B$ ist

$$\frac{A}{B} < 1, \quad \text{folglich} \quad \left(\frac{A}{B}\right)^m = \frac{A^m}{B^m} < 1.$$

**10.** *Für alle positiven $A$ ist*

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Beweis: Nennt man $n_1$ jede positive rationale Zahl $< n$, so stellt die Summe $m_1 + n_1$ alle positiven rationalen Zahlen $< m + n$ dar. Demnach haben die Zahlen

$$A^{m_1+n_1} \quad \text{d. i.} \quad A^{m_1} A^{n_1}$$

die Potenz $A^{m+n}$ zur unteren Grenze bei $A < 1$, zur oberen bei $A > 1$. Zugleich ist $A^m A^n$ bei $A < 1$ die untere, bei $A > 1$ die obere Grenze der Produkte $A^{m_1} A^{n_1}$. Folglich fällt $A^m A^n$ mit $A^{m+n}$ zusammen bei $A \gtrless 1$. Der Fall $A = 1$ erledigt sich ohne weiteres.

Ist $g$ eine positive ganze Zahl, so ergiebt sich aus dem soeben bewiesenen Satze:

$$(A^m)^2 = A^{2m}, \quad (A^m)^3 = A^{3m}, \ldots, \quad (A^m)^g = A^{gm},$$

weiter:

$$\left(A^{\frac{m}{g}}\right)^g = A^m, \quad \sqrt[g]{A^m} = A^{\frac{m}{g}}.$$

Jede positive rationale Zahl $v$ ist der Quotient zweier positiven ganzen Zahlen $g$ und $h$. Nun folgt aus obigem:

$$\sqrt[h]{(A^m)^g} = \sqrt[h]{A^{gm}} = A^{\frac{gm}{h}}.$$

Folglich hat man:

$$(A^m)^v = A^{mv}.$$

**11.** *Für alle positiven $A$ ist*

$$(A^m)^n = A^{mn}.$$

Beweis: Ich nenne $\nu$ jede positive rationale Zahl $< n$, $p$ jede positive Zahl $< mn$. Bei $A < 1$ ist $A^m < 1$, $A^{mn}$ die untere Grenze der $A^p$, d. i. die untere Grenze der $A^{mn'}$; denn setzt man $p = mn'$, so ist $n' < n$, also $n'$ zwischen zwei Zahlen $\nu$, $p$ zwischen zwei Zahlen $m\nu$ gelegen. Nach dem Zusatz zum vorhergehenden Theorem ist aber

$$A^{m\nu} = (A^m)^\nu,$$

mithin $(A^m)^n$ die untere Grenze der $A^{m\nu}$. Damit ist die Behauptung für $A < 1$ bewiesen. Bei $A > 1$ hat man „obere Grenze" statt „untere Grenze" zu schreiben. Bei $A = 1$ ist die Richtigkeit sofort klar.

**12.** Sind die positiven Zahlen $A$, $B$, $m$ gegeben, so kann man stets eine positive Zahl $x$ so wählen, dass $x^m$ zwischen $A$ und $B$ liegt.

Man braucht nur $x$ zwischen $A^{\frac{1}{m}}$ und $B^{\frac{1}{m}}$ anzunehmen.

**13.** *Wenn $A$ eine positive Zahl, $a_1$ jede positive Zahl $< A$, $a_2$ jede endliche Zahl $> A$ bedeutet, so ist $A^m$ obere Grenze der Zahlen $a_1^m$, untere Grenze der Zahlen $a_2^m$.*

Beweis: Zunächst ist stets

$$A^m > a_1^m, \quad A^m < a_2^m.$$

Wird nun die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig gegeben und die positive Zahl $u$ zwischen $A^m - \varepsilon$ und $A^m$ beliebig angenommen, so giebt es eine positive Zahl $x$ derart, dass $x^m$ zwischen $u$ und $A^m$, also $x < A$; diese Zahl $x$ ist eine Zahl $a_1$, für welche

$$A^m - \varepsilon < u < a_1^m < A^m.$$

Ebenso giebt es eine Zahl $a_2$, für welche

$$A^m < a_2^m < A^m + \varepsilon.$$

**14.** Werden die Zahlen $A$ und $x$ grösser als Eins angenommen, so existiert stets eine und nur eine positive Zahl $y$ derart, dass

$$A^y = x.$$

Beweis: Nach Satz 1. giebt es Potenzen von $A$, welche grösser als $x$ sind; nach Satz 6., Anmerkung, giebt es Potenzen von $A$, welche kleiner als $x$ sind. Versteht man also unter $m$ jeden Exponenten, für welchen $A^m < x$ ausfällt, so bilden die $m$ eine stetige Folge mit der unteren Grenze Null und einer endlichen positiven oberen Grenze $y$; nach dem sechsten Theorem (siehe den Zusatz daselbst) ist $A^y$ obere Grenze der $A^m$, folglich

$$A^y < x.$$

Nach demselben Theorem ist, wenn man unter $n$ jede Zahl $> y$ versteht, $A^y$ untere Grenze der $A^n$, zugleich $A^n > x$, folglich

$$A^y > x.$$

Hiernach fällt $A^y$ mit $x$ zusammen, während alle anderen Potenzen von $A$ entweder über oder unter $x$ liegen.

Die vorstehenden Sätze enthalten nicht nur die Übertragung der für rationale Exponenten giltigen Sätze auf irrationale, sondern sie bahnen zugleich die Auflösung der Aufgabe an:

> eine beliebige positive Zahl als Potenz einer beliebigen, aber von Eins verschiedenen positiven Zahl darzustellen.

Soll es möglich sein, dieser Aufgabe immer zu genügen, so darf man sich nicht mehr auf positive Exponenten beschränken. Ich nehme deshalb an, dass jetzt die Einführung beliebiger Exponenten in der üblichen Weise vorgenommen wird; es ist dann leicht, die erforderlichen Modifikationen an den oben aufgestellten Sätzen anzubringen. Für die rationalen Exponenten mit ungeraden Nennern wird auch die Beschränkung auf positive Grundzahlen nicht aufrecht erhalten, und für die rationalen Exponenten mit geraden Nennern müssen zwei Werte der Potenz zugelassen werden; bei der nunmehr aufzustellenden Erklärung der Logarithmen kommen jedoch die bloss auf rationale Exponenten bezüglichen Erweiterungen nicht in Betracht.

Es sei $A$ eine von Eins verschiedene positive Zahl, $x$ eine beliebige positive Zahl. Ist $A > 1$ und $x > 1$, so kann man $x$ als Potenz von $A$ darstellen nach Satz 14. Auf diesen Fall lassen sich aber alle anderen zurückführen (ausgenommen den Fall $x = 1$, wo $x = A^0$); ist nämlich $A > 1$ und $x < 1$, also $\frac{1}{x} > 1$, so kann man $\frac{1}{x}$ in der Form $A^z$ darstellen und erhält:

$$x = A^{-z};$$

ist $A < 1$, also $\frac{1}{A} > 1$, so kann man hiernach immer $x$ in der Form $\left(\frac{1}{A}\right)^z$ darstellen und erhält wieder $x = A^{-z}$. Man kann also stets eine und zwar nur eine Zahl $y$ angeben derart, dass

$$A^y = x.$$

Die Zahl $y$ heisst der Logarithmus von $x$ in Bezug auf $A$, $x$ der Numerus oder Logarithmandus, $A$ die Grundzahl oder Basis. Man schreibt:

$$y = {}^A\log x.$$

Bei $A > 1$ wächst $y$ zugleich mit $x$, bei $A < 1$ nimmt $y$ ab bei wachsendem $x$; in beiden Fällen nimmt $y$ alle endlichen Werte an, während $x$ die Reihe der positiven Zahlen durchläuft, und zwar jeden Wert nur einmal

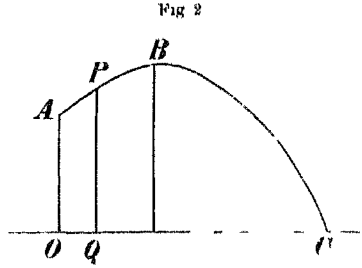
Während der Numerus zwischen $0$ und $x$ variiert, nimmt der Logarithmus bei $A > 1$ alle Werte zwischen $-\infty$ und $y$, bei $A < 1$ alle Werte zwischen $y$ und $+\infty$ an. Während der Numerus zwischen $x$ und $+\infty$ variiert, nimmt der Logarithmus bei $A > 1$ alle Werte zwischen $y$ und $+\infty$, bei $A < 1$ alle Werte zwischen $-\infty$ und $y$ an.

Die Regeln für die Rechnung mit Logarithmen leitet man aus den Eigenschaften der Potenzen ab. Wir werden an einer späteren Stelle (§ 19) von einem anderen Gesichtspunkte aus auf die Potenzen und Logarithmen nochmals zurückkommen*

## § 6. Begriff der Funktion.

Aus der Funktionenlehre sind zunächst einige allgemeine Erörterungen vorzutragen; dieselben mögen an ein Beispiel angeknüpft werden. Stellen wir uns vor, dass ein Körper, der bis dahin die Lage $A$ über der Erdoberfläche einnahm, durch einen schräg aufwärts gerichteten Stoss in Bewegung gesetzt ist. Der Punkt $A$ befindet sich vertikal über einem bestimmten Punkte der Erdoberfläche, den wir $O$ nennen; die Vertikale $OA$ bestimmt mit der Richtung des Stosses eine gewisse vertikale Ebene, und in dieser verläuft die ganze Bewegung des Körpers. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Körper ausschliesslich der Schwerkraft ausgesetzt ist und auf keine Hindernisse stösst. Die Bahn ist alsdann ein Parabelbogen, sie steigt von $A$ bis zu einem gewissen Punkte $B$, um dann in beständigem Fall die Erdoberfläche bei $C$ zu erreichen, so dass die Linie $OC$ horizontal und der Winkel $COA$ ein rechter ist.

Fig 2




Der Voraussetzung gemäss besitzt der Körper beim Beginn der Bewegung eine gewisse Erhebung über der Erdoberfläche, dargestellt durch die Strecke $OA$; wir nehmen den Meter als Längeneinheit und bezeichnen die Länge

* Siehe auch §§ 8 und 12

der Strecke $OA$ mit $a$. Durch den Stoss, welcher die Bewegung hervorruft, empfängt der Körper eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit, die in eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit $b$ und in eine vertikal aufwärts gerichtete $c$ zerlegt werden kann. Nach $t$ Sekunden werde der Punkt $P$ erreicht, der vertikal über $Q$ liege; wird die Strecke $OQ$ durch die Zahl $x$, die Strecke $QP$ durch die Zahl $y$ dargestellt, so bedeutet $x$ den während der ersten $t$ Sekunden in horizontaler Richtung zurückgelegten Weg, $y$ die am Ende dieser Zeit erlangte Höhe des Körpers über der Horizontalen $OC$. Im Punkte $P$ besitzt der Körper eine gewisse Geschwindigkeit, deren Richtung in der Ebene $AOC$ enthalten ist, und die man wieder in eine horizontale Geschwindigkeit $u$ und eine vertikale $v$ zerlegen kann. Wir stellen uns nun die Aufgabe, Ort und Geschwindigkeit des Körpers für jeden Moment der Bewegung anzugeben.

Auf die horizontale Bewegung übt die Schwerkraft keinen Einfluss aus. Die horizontale Geschwindigkeit hatte im Anfang den Wert $b$ und behält ihren Wert für die ganze Dauer der Bewegung; also ist $u=b$. Vermöge dieser Geschwindigkeit wird in jeder Sekunde in horizontaler Richtung der Weg $b$ zurückgelegt, in $t$ Sekunden der Weg $bt$; also ist $x=bt$. Um $v$ zu finden, wird die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper nach einer Sekunde erreicht, eingeführt und wie üblich mit $g$ bezeichnet:

$$g=9{,}81.$$

Die vertikale Geschwindigkeit war anfangs gleich $c$, wird aber durch die Schwerkraft in jeder Sekunde um $g$ Meter verringert; folglich kommt $v=c-gt$.* Könnte der Körper, der anfangs die Höhe $a$ über der Erdoberfläche besass, sich unter der Wirkung des Stosses allein fortbewegen, so würde er in jeder Sekunde um $c$ Meter steigen, also nach $t$ Sekunden die Höhe $a+ct$ erreichen; die Schwerkraft aber zieht ihn in dieser Zeit um $\frac{1}{2}gt^2$ herab, und es bleibt $y=a+ct-\frac{1}{2}gt^2$. Somit ergeben sich die Formeln:

$$x=bt,\quad y=a+ct-\tfrac{1}{2}gt^2,$$
$$u=b,\quad v=c-gt,$$

aus denen man schliesst:

$$v^2+2gy=c^2+2ag,\quad y=a+\frac{c^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}.$$

* Vergl. § 7 Anfang.

Diese Formeln können wir anwenden, um die einzelnen Stellen der Bahn zu untersuchen; wir wollen insbesondere auf die beiden Momente näher eingehen, wo der höchste Punkt $B$ und der tiefste Punkt $C$ erreicht wird. Wenn man

$$\frac{c}{g} \text{ mit } \alpha$$

bezeichnet, so wird

$$v = g(\alpha - t),$$

und man sieht, dass nach $\alpha$ Sekunden die anfangs nach oben gerichtete vertikale Geschwindigkeit sich auf Null reduziert, der Körper zu steigen aufhört und in das Sinken übergeht. Im Punkte $B$ ist also $v = 0$, und wenn man seine Höhe mit $h$ bezeichnet,

$$h = a + \frac{c^2}{2g};$$

mithin schreiben wir auch:

$$y = h - \frac{v^2}{2g} = h - \tfrac{1}{2} g (t - \alpha)^2.$$

Es war $\alpha$ die Dauer des Steigens; ist $\beta$ die des Fallens und $\alpha + \beta = m$, so ist $m$ die der ganzen Bewegung, also nach $m$ Sekunden verschwindet $y$, d. h. es ist $0 = h - \frac{1}{2} g (m - \alpha)^2 = h - \frac{1}{2} g \beta^2$ und

$$\beta = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ (positiv)}, \quad OC = bm.$$

In der vorstehenden Betrachtung sind nach einander eine Reihe von Grössen eingeführt worden, nämlich

$$a, b, c, t, x, y, u, v, g, \alpha, h, \beta, m.$$

Es sollte eine bestimmte Bewegung beschrieben werden, deren einzelne Momente somit zu verfolgen waren; es handelte sich nicht darum, diese Bewegung im ganzen oder im einzelnen mit anderen ähnlichen zu vergleichen. Demgemäss behalten die Grössen

$$a, b, c, u, g, \alpha, h, \beta, m$$

während der ganzen Betrachtung beständig dieselben Werte; sie heissen die Konstanten des Problems. Unveränderlich brauchen sie darum nicht zu sein. Zwar die Konstante $g$ hat allemal den einen oben angegebenen Wert und heisst deshalb eine numerische Konstante. Hingegen kann man die Werte der Konstanten $a, b, c$ (durch welche $u, \alpha, h, \beta, m$ bedingt werden) in gewissen Grenzen beliebig annehmen. Aber nur insofern man die einmal gewählten Werte festhält, bleibt man bei unserer Aufgabe stehen; verändert man jene Werte, so geht man zu einer anderen Aufgabe über.

Anders verhalten sich die Grössen $t, x, y, v$. Während der zu beschreibenden Bewegung durchläuft $t$ eine Reihe von Zahlen, nämlich alle Werte von 0 bis $m$, $x$ die von 0 bis $bm$, $y$ die von $a$ bis $h$ und dann die von $h$ bis 0, $v$ die von $c$ bis $c-gm$. Daher heissen die Grössen

$$t, \; x, \; y, \; v$$

die Variablen des Problems; eine jede von ihnen wird in dem Problem variiert, $t$ in dem Intervall von 0 bis $m$ u. s. w.

*Bei jeder Aufgabe heissen die Grössen, welche in ihr denselben Wert fortwährend behalten, die Konstanten der Aufgabe, hingegen jede Grösse, welche eine Reihe von Werten durchläuft, eine Variable der Aufgabe.* Jede Konstante einer Aufgabe, ausgenommen die numerischen Konstanten, kann Variable bei einer anderen Aufgabe sein, und umgekehrt.

Bei der obigen Aufgabe nimmt $t$ nach und nach jeden Wert an aus einem gewissen Intervall, ebenso $x$; aber man kann nicht mit einem beliebigen Werte der Variablen $t$ einen beliebigen Wert der Variablen $x$ verbinden; vielmehr muss man, wenn man irgend einen Wert von $t$ wählt, der Variablen $x$ einen bestimmten Wert beilegen, da $x=bt$. Es besteht hier zwischen $t$ und $x$ ein Abhängigkeitsverhältnis. Das Gleiche wiederholt sich zwischen $t$ und $y$, zwischen $t$ und $v$; die Variablen $x, y, v$ sind von der Variablen $t$ abhängig vermöge der Gleichungen

$$x=bt, \quad y=a+ct-\tfrac{1}{2}gt^2, \quad v=c-gt,$$

und man stellt deshalb $x, y, v$ als die abhängigen Variablen des Problems der Grösse $t$, der unabhängigen (independenten) Variablen des Problems gegenüber. Hätten wir uns die Frage gestellt, wie man aus der Geschwindigkeit des Körpers (also aus $v$, da $u$ beständig $=b$) die Zeit und den Ort (also $t, x, y$) berechnet, so würden wir mit den Gleichungen

$$t=\frac{c-v}{g}, \quad x=\frac{b(c-v)}{g}, \quad y=h-\frac{v^2}{2g}$$

antworten. Dann hätte man $t, x, y$ als abhängige Variablen, $v$ als die independente aufzufassen, und man sieht, wie diese Unterscheidung sich nicht aus der Bedeutung der Variablen ergiebt, sondern die Fragestellung wesentlich in Betracht kommt.

Wir hatten hier nur eine einzige Independente. Das ist jedoch nicht der allgemeine Fall; die Zahl der unabhängigen Variablen ist ebensowenig beschränkt, wie die der abhängigen. Stellen wir uns ein Problem mit irgend einer Anzahl von Independenten vor und fassen irgend eine abhängige Veränderliche ins Auge, so wird diese wenigstens von einer Independenten abhängen, aber nicht notwendig von allen. Man nennt die abhängige Veränderliche eine Funktion derjenigen Independenten, von denen sie abhängt, deren Wertangabe also notwendig ist und hinreicht, um jene zu bestimmen. Also sind im obigen Beispiel $x, y, v$ Funktionen von $t$, aber durch veränderte Fragestellung können $t, x, y$ Funktionen von $v$ werden.

Um jetzt den Gebrauch des Wortes „Funktion" ohne Bezugnahme auf einen speciellen Fall zu erklären, bleiben wir zuerst bei einer einzigen Independenten stehen. Wenn $t$ einen Wert bezeichnet, der im unendlichen Zahlengebiete oder in einem gegebenen Teile desselben beliebig gewählt werden darf, und durch ein gegebenes, auf $t$ allemal anwendbares Verfahren eine bestimmte Zahl $v$ erlangt wird, die nicht bei jeder zulässigen Veränderung von $t$ unverändert bleibt, so sagt man, $v$ sei eine gewisse Funktion der Unbestimmten $t$, und nennt in Bezug auf dieses Verhältnis $t$ auch die unabhängige Variable (die Independente, das Argument), $v$ die abhängige Variable. In der zur Herstellung der Funktion gegebenen Anweisung* können ausser $t$ noch andere Grössen vorkommen; diese jedoch müssen bei allen Veränderungen von $t$ ihre Werte behalten und heissen die Konstanten (Parameter) der Funktion. Wenn man ihre Werte durch andere ersetzt, so erhält man im allgemeinen eine andere Funktion von $t$.

Die Werte, welche für $t$ gewählt werden dürfen, bilden das Gebiet des Arguments. Wenn diese Werte eine stetige Folge ausmachen, so heisst $t$ eine stetige (kontinuierliche) Variable; die Werte von $t$ erfüllen** dann ein Intervall mit einer bestimmten unteren Grenze (welche $-\infty$ sein kann) und einer bestimmten oberen Grenze (welche $+\infty$ sein kann); jede Zahl zwischen diesen Grenzen ist ein Wert von $t$, aber ob die Grenzen selbst zum Intervall gehören sollen, muss besonders angegeben werden.

Die Erklärung der Funktion wird leicht auf mehrere Argumente ausgedehnt. Dabei ist indessen Folgendes zu bemerken.

---

* Die Vorschrift, nach welcher $v$ bestimmt wird, braucht nicht für alle in Betracht kommenden $t$ dieselbe zu sein.

** Vergl. § 4 Seite 17.

Soll $v$ Funktion etwa von zwei Argumenten $s$ und $t$ sein, so darf $v$ nicht immer unverändert bleiben, wenn man $s$ festhält und $t$ variiert, d. h. bei konstantem $s$ muss $v$ im allgemeinen Funktion von $t$ sein, u. s. w. Ferner, wenn wir bei zwei Argumenten $s$ und $t$ bleiben, so hat $s$ eine gewisse Reihe von Werten zu durchlaufen, ebenso $t$, aber es kann eine Einschränkung gegeben sein, die es nicht gestattet, jeden zulässigen Wert von $s$ mit jedem zulässigen Werte von $t$ zu kombinieren. Es kann z. B. verlangt sein, dass $s^2+t^2$ die Einheit nicht überschreite, während $s$ und $t$ im übrigen beliebig bleiben; das genügt in der That, wenn die Funktion durch die Quadratwurzel aus $1-s^2-t^2$ dargestellt wird.

Als Funktionen oder als Argumente von Funktionen können Grössen auftreten, welche bei einer anderen Gelegenheit unter die Konstanten zu zählen waren. So darf man bei der vorhin besprochenen Bewegung $h$, $\beta$, $m$ als Funktionen von $a$ und $c$, $\alpha$ als Funktion von $c$ bezeichnen, da

$$\alpha=\frac{c}{g},\quad h=a+\frac{c^2}{2g},\quad \beta=\sqrt{\frac{2h}{g}},\quad m=\frac{c}{g}+\sqrt{\frac{2a}{g}+\frac{c}{4g^2}}.$$

Gehören die Argumente einer Funktion zu den Konstanten einer gewissen Betrachtung, so gilt dies auch von der Funktion.

Als Argumente einer Funktion können auch Grössen auftreten, welche ihrerseits Funktionen gewisser Argumente sind. Ist $v$ eine Funktion von $p$, und $p$ eine Funktion von $t$, so ist auch $v$ eine Funktion von $t$. Ist dagegen $v$ eine Funktion der Variablen $p$ und $q$, welche ihrerseits Funktionen von $t$ sein sollen, so ist nicht immer $v$ eine Funktion von $t$; denn wenn z. B.

$$v=p^2+q^2,\quad p=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad q=\frac{2t}{1+t^2},$$

so hat man $v=1$ für alle Werte von $t$, also $v$ konstant. Allgemein gilt Folgendes: *Eine Funktion von einer Funktion beliebig vieler Argumente ist eine Funktion dieser Argumente; aber eine Funktion von mehreren Funktionen gewisser Argumente ist entweder eine Funktion dieser Argumente oder eines Teiles derselben oder von allen diesen Argumenten unabhängig.*

Erscheinungen, wie die eben erwähnte, machen es wünschenswert, das Wort „Funktion" manchmal in einem weiteren Sinne zu gebrauchen. Man versteht alsdann unter einer Funktion gewisser Argumente eine Grösse, die entweder von diesen Argumenten oder nur von einem Teile oder auch von keinem derselben abhängt, die aber jedenfalls keine anderen Argumente enthält. In diesem Sinne ist man berechtigt, zu den Funktionen irgendwelcher Argumente jedes Argument selbst zu zählen, ebenso jede Konstante. Man muss aber allemal darauf achten, in welchem Sinne das Wort Funktion gebraucht ist. Nur wenn es in dem zuletzt erklärten Sinne angewendet wird, darf man den Satz aussprechen:

> Eine Funktion von beliebig vielen Funktionen gewisser Argumente ist stets eine Funktion dieser Argumente.

Um die bei einer Betrachtung vorkommenden Funktionen kurz zu bezeichnen, führt man Buchstaben ein und spricht z. B. von einer $f$-Funktion des Argumentes $t$, von einer $g$-Funktion des Argumentes $t$, von einer $\varphi$-Funktion der Argumente $s$ und $t$ u. s. w., kürzer:

$$f(t), \quad g(t), \quad \varphi(s, t) \quad \text{u. s. w.}$$

Wird beispielsweise die Funktion

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{mit} \quad f(t)$$

bezeichnet, so ist

$$f(0)=1, \quad f(-1)=f(1)=0, \quad f(t)=f(-t).$$

Versteht man unter

$$g(t) \quad \text{die Funktion} \quad \frac{2t}{1+t^2},$$

so ist

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad f(-1)=-1, \quad f(t)=-f(-t).$$

Wenn

$$F(p, q) \quad \text{die Funktion} \quad p^2+q^2$$

bedeutet, so hat man:

$$F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)=1.$$

Manchmal werden noch andere Funktionszeichen benutzt, die man alsdann besonders erklärt.

Die Funktion $f(t)$ wird in einem gewissen Gebiete eine **gerade Funktion** von $t$ genannt, wenn an allen Stellen des Gebietes die Gleichung

$$f(-t)=f(t)$$

gilt; sie heisst eine **ungerade Funktion**, wenn sie durchweg die Gleichung

$$f(-t)=-f(t)$$

erfüllt.

## § 7. Geometrische Darstellung von Funktionen.

Die Betrachtung einer Funktion gewinnt in mancher Hinsicht an Anschaulichkeit durch geometrische Darstellung ihres Verlaufes. Wie eine solche Darstellung bei Funktionen einer einzigen Independenten erfolgen kann, soll jetzt näher besprochen werden, und zwar in Anlehnung an das den Erörterungen des vorigen Paragraphen zu Grunde gelegte Beispiel.

Zu dem Zweck ist vor allem ein Übereinkommen zu treffen, von dem wir bereits stillschweigend Gebrauch gemacht haben. Als auf Seite 26 die vertikale Geschwindigkeit $v$ ermittelt werden sollte, hätten wir angeben können

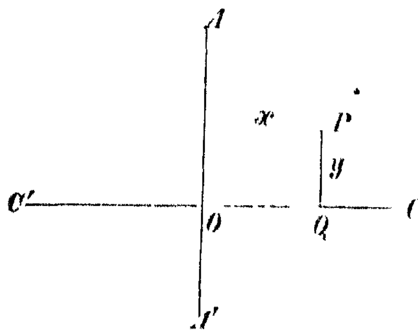
von 0 bis $\alpha$ Sekunden: $c-gt=g(\alpha-t)$ Meter aufwärts,
von $\alpha$ bis $m$ Sekunden: $gt-c=g(t-\alpha)$ Meter abwärts.

Statt dessen gaben wir den einen Ausdruck $v=c-gt$ für beide Teile der Bahn und unterschieden die beiden entgegengesetzten Richtungen jener Geschwindigkeit mittels des Vorzeichens von $v$, indem die Richtung nach oben dem positiven, die Richtung nach unten dem negativen Zeichen entsprach. Dieses Verfahren ist allemal anwendbar, wenn Bewegungen (Geschwindigkeiten, Kräfte) in einer Geraden oder in parallelen Geraden durch Zahlen wiedergegeben werden; es sind dann zwei entgegengesetzte Richtungen zu unterscheiden, und zu dem Zwecke wird die betreffende Anzahl von Einheiten bei den in der einen Richtung zu durchlaufenden Strecken mit dem Pluszeichen, bei den in der andern Richtung zu durchlaufenden mit dem Minuszeichen versehen. Demgemäss heisst die eine Richtung die positive, die andere die negative; welche Richtung positiv heissen soll, muss in jedem einzelnen Falle angegeben werden.

Hierauf gestützt, werden wir jetzt erklären, wie man zur Darstellung der geometrischen Gebilde durch Zahlen gelangt, jedoch unter Beschränkung auf eine Ebene. Es werden in dieser Ebene zwei gerade Linien angenommen, $C'C$ und $A'A$, die sich rechtwinklig kreuzen im Punkte $O$ zwischen $C, C'$ und zwischen $A, A'$. Mit $P$ bezeichnen wir irgend einen Punkt der Ebene und fällen aus $P$ eine Senkrechte auf die Gerade $C'C$; ihr Fusspunkt heisse $Q$. Um von $O$ nach $Q$ zu gelangen, hat man in der Geraden $C'C$ eine gewisse Anzahl von Einheiten in bestimmter Richtung zu durchlaufen; wir wählen als positive Richtung die von $C'$ nach $C$ und verstehen unter $x$ die Anzahl der in $OQ$ enthaltenen Längeneinheiten, mit dem der Richtung von $O$ nach $Q$ entsprechenden Zeichen versehen, so dass

$OQ = x$, aber $QO = -x$.

Fig. 3.




Die Zahl $x$ giebt durch ihren absoluten Wert an, wie weit der Punkt $P$ von der Linie $A'A$ entfernt ist, und durch ihr Vorzeichen, ob der Punkt $P$ sich mit $C$ oder mit $C'$ auf derselben Seite der Linie $A'A$ befindet; man nennt $x$ die Abscisse des Punktes $P$ in Bezug auf die Geraden $C'C$ und $A'A$ (in dieser Reihenfolge) darf aber hierbei die Punkte $C'$ und $C$ nicht mit einander vertauschen, weil durch ihre Reihenfolge zugleich die positive Richtung der Abscissen angedeutet werden soll.

Mit Hilfe der Abscisse bestimmt man den Punkt $Q$. Um nun von $Q$ nach $P$ zu gelangen, hat man parallel zu $A'A$ eine gewisse Anzahl von Einheiten in bestimmter Richtung zu durchlaufen; als positive Richtung wählen wir die von $A'$ nach $A$ und nennen $y$ die Anzahl jener Einheiten mit dem der Richtung von $Q$ nach $P$ entsprechenden Zeichen, so dass

$$QP = y, \quad \text{aber} \quad PQ = -y.$$

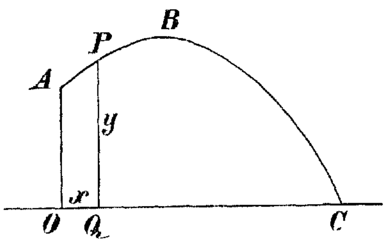
Der absolute Wert von $y$ misst die Entfernung des Punktes $P$ von der Geraden $C'C$; aus dem Vorzeichen von $y$ schliesst man, ob $P$ mit $A$ oder mit $A'$ auf einerlei Seite der Geraden $C'C$ liegt. Man nennt $y$ die Ordinate des Punktes $P$ in Bezug auf die Geraden $C'C$ und $A'A$ (in dieser Reihenfolge), wobei die Buchstaben $A'$ und $A$ nicht umgestellt werden dürfen. Endlich nennt man $x$ und $y$ die Koordinaten des Punktes $P$ in Bezug auf die Geraden $C'C$ und $A'A$, die Koordinatenaxen.

Wenn man überhaupt nach irgend einer Vorschrift jedem Punkte der Ebene Zahlen zuordnet, durch die man seine Lage zu bestimmen vermag, so nennt man diese Zahlen die Koordinaten des Punktes in dem durch jene Vorschrift gekennzeichneten Koordinatensysteme. Ein Koordinatensystem, wie das vorhin erklärte, heisst ein rechtwinkliges oder orthogonales; ein solches System wird bestimmt durch die Koordinatenaxen $OC$ und $OA$, von denen die erstere die

Abscissenaxe, die letztere die Ordinatenaxe heisst. Für jeden Punkt der Ordinatenaxe ist die Abscisse null, für jeden Punkt der Abscissenaxe ist die Ordinate null; der Durchschnittspunkt $O$ hat beide Koordinaten gleich Null und heisst der Nullpunkt oder Anfangspunkt oder Ursprung der Koordinaten.

Rechtwinklige Koordinaten haben wir bei der Untersuchung der Bahn eines schräg geworfenen Körpers angewendet. In der That sind die dort mit $x$ und $y$ bezeichneten Zahlen nichts anderes als rechtwinklige Koordinaten des Punktes $P$; die Abscissenaxe $OC$ ist horizontal, ihre positive Richtung entspricht der Fortbewegung des Körpers; die Ordinatenaxe ist vertikal durch den Ausgangspunkt der Bewegung gelegt, ihre positive Richtung geht aufwärts.

Fig 4




Die Koordinaten des Punktes $P$ sind Funktionen der Zeit, nämlich

$$x = bt, \quad y = a + ct - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Es lässt sich aber auch $y$ als Funktion von $x$ darstellen, nämlich

$$y = a + \frac{c}{b} x - \frac{g}{2b^2} x^2,$$

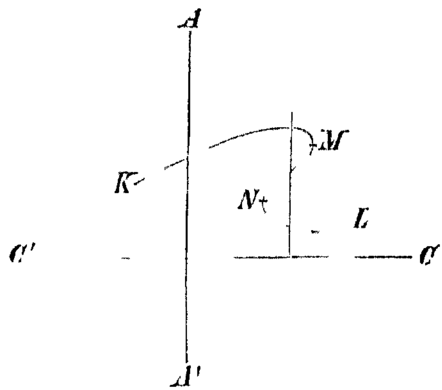
wo $x$ die Independente ist und von 0 bis $bm$ variiert. Diese Gleichung wird von allen Punkten der Linie $ABC$ und (in Rücksicht auf das beigemerkte Intervall der Variablen $x$) von keinem anderen Punkte erfüllt; sie kann daher zur Bestimmung der Linie $ABC$ benutzt werden und heisst die Gleichung der letzteren in dem zu Grunde gelegten Koordinatensysteme.

Betrachten wir jetzt irgend eine ebene Linie (Plankurve) und nennen $P$ einen Punkt, der in ihr beliebig gewählt werden darf, $x$ und $y$ seine Koordinaten in einem rechtwinkligen Systeme, so haben die Punkte der Linie im allgemeinen nicht dieselbe Abscisse*, sondern $x$ variiert stetig in einem Intervall, d. h. $x$ nimmt alle zwischen den Grenzen des Intervalles vorhandenen Zahlenwerte an. Dabei entspricht jedem Werte von $x$ mindestens ein Punkt der Linie; es können aber auch mehrere entsprechen; z. B. bei der umstehend gezeichneten Linie $KL$ kommen Abscissen vor, denen drei Punkte

* Siehe unten Seite 36.

entsprechen. Man kann nun die gegebene Linie nötigenfalls derart in Abschnitte zerlegen, dass in jedem Abschnitt keine Abscisse mehrmals vorkommt, z. B. die Linie $KL$ in die Abschnitte $KM$, $MN$, $NL$; auf solche Abschnitte beschränken wir uns und dürfen dann sagen, dass zu jeder Abscisse $x$ aus dem betreffenden Intervall ein einziger Punkt $P$, eine einzige Ordinate $y$ gehört.

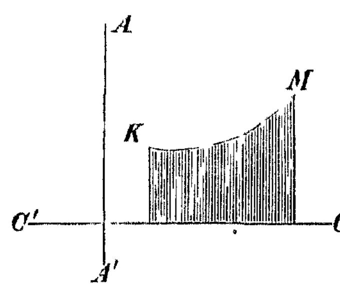
Fig. 5.




Ist die Linie durch ihre geometrischen Eigenschaften definiert, so lehrt die „analytische Geometrie", wie man diese Eigenschaften benutzt, um zu jeder Abscisse $x$ die zugehörige Ordinate $y$ durch Rechnung zu finden, d. h. die Ordinate als Funktion der Abscisse darzustellen. Aber auch wenn die Linie nur gezeichnet (mithin begrenzt) vorliegt, z. B. als Resultat von Versuchen, so kann man immer ein Funktionsverhältnis zwischen $x$ und $y$ aufstellen, welches die Linie mit hinreichender Genauigkeit wiedergiebt. Dies leistet u. a. folgendes Verfahren. Man teilt die gegebene Linie $KM$ in möglichst viele Teile, etwa in $n$ Teile, so dass $n+1$ Punkte vermerkt werden, misst die Koordinaten der $n+1$ Punkte und nimmt $y$ als Funktion von $x$ in der Form

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$$

Fig. 6



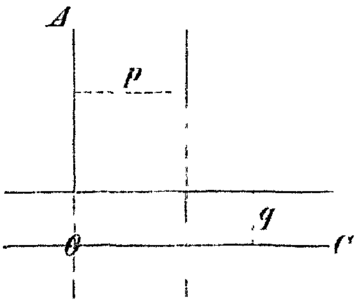

mit $n+1$ noch zu bestimmenden Koefficienten $a, b, c \dots$ an. Ersetzt man $x$ und $y$ in der vorstehenden Gleichung nach und nach durch die Koordinaten jener $n+1$ Punkte, so erhält man $n+1$ Gleichungen ersten Grades für die unbekannten Koefficienten; man berechnet die letzteren, setzt in den für $y$ angenommenen Ausdruck die gefundenen Werte ein und erhält so eine möglichst genaue* Darstellung der Linie $KM$.

* In Rücksicht darauf, dass $y$ als stetige Funktion von $x$ ausgedrückt wurde, vergl. §§ 10 und 12.

Hiernach besitzt jede Linie der betrachteten Art eine Gleichung, welche die Ordinate als Funktion der Abscisse ausdrückt.

Die Ordinatenaxe hat die Eigenschaft, dass allen ihren Punkten dieselbe Abscisse entspricht, nämlich Null, und hat daher die Gleichung $x = 0$; die Parallele zur Ordinatenaxe, welche einen Punkt mit der Abscisse $p$ enthält, hat die Gleichung $x = p$; für solche Linien ist die Ordinate nicht Funktion der Abscisse, sondern die Abscisse konstant, die Ordinate beliebig. Die Gleichung der Abscissenaxe ist $y = 0$; die Parallele zur Abscissenaxe, welche einen Punkt mit der Ordinate $q$ enthält, hat die Gleichung $y = q$; für diese Linien kann die Ordinate nur dann eine Funktion der Abscisse genannt werden, wenn man als speciellen Fall einer Funktion von $x$ die Konstante $q$ zulässt. In allen anderen Fällen sind beide Koordinaten variabel und von einander abhängig; der analytische Ausdruck dieser Abhängigkeit spiegelt den ganzen Verlauf der Linie wieder.

Fig 7

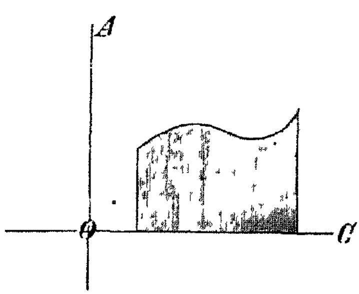



Man bedient sich aber auch umgekehrt einer ebenen Kurve, um den Verlauf einer Funktion einer stetigen Variablen zu verfolgen. Es sei $y$ als Funktion der Independenten $x$ gegeben, etwa

$$y = f(x).$$

In einem begrenzten Intervall nehme man Werte von $x$, die möglichst dicht aufeinander folgen, und berechne die zugehörigen Werte von $y$. Die so entstehenden Wertepaare sind, wenn man in einer Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem einführt, die Koordinaten von ebensovielen Punkten der Ebene. Man konstruiert die betreffenden Punkte, die sich im allgemeinen* sehr nahe aneinander anschliessen werden, und verbindet sie durch eine zusammenhängende Linie; die Gleichung $y = f(x)$ giebt diese Linie hinreichend genau wieder, und man nennt die letztere eine geometrische oder graphische

Fig 8




* Wenn nämlich $y$ eine stetige Funktion von $x$ ist, vergl. § 10.

Darstellung der Funktion $f(x)$ in dem betrachteten Intervall. Die Linie lässt in der That den Verlauf der Funktion im grossen Ganzen erkennen; die Eigenschaften der Linie lassen sich in gewissen Grenzen auf die Funktion übertragen. *Aber man darf nicht unbedingt aus den Eigenschaften der Linien auf die entsprechenden Eigenschaften der Funktionen schliessen, vielmehr ist für jede Eigenschaft der Funktionen ein analytischer Beweis zu fordern.* Es giebt Funktionen mit Eigenschaften, die sich gar nicht geometrisch veranschaulichen lassen; aber auch davon abgesehen ist keine Zeichnung genau genug, um alle bei dem Verlaufe einer Funktion möglichen Einzelheiten zu umfassen.

Wenn man sich hütet, der graphischen Darstellung mehr als ihren wahren Wert beizumessen, so gewährt sie den Vorteil, dass alles, was sie bietet, anschaulich und übersichtlich hervortritt. Darum mag man sich immer auf sie beziehen und die geometrischen Ausdrücke anwenden, also von der Abscisse sprechen statt der Independenten, von der Ordinate statt der Funktion, vom Punkte $(x, y)$, d. i. mit den Koordinaten $x$ und $y$, statt dem Wertepaare $x$, $y$, wobei ein rechtwinkliges Koordinatensystem in einer Ebene vorausgesetzt wird.

## § 8. Begriff des Grenzwertes.

Wir haben für eine Bewegung, die unter gewissen Voraussetzungen eintritt und in einer ebenen Bahn vor sich geht, in Bezug auf ein durch die Aufgabe selbst nahegelegtes rechtwinkliges System die Gleichungen gefunden:

$$1)\qquad x = bt, \quad y = a + ct - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

wo $a, b, c, g$ Konstanten sind und $x, y$ die Koordinaten des nach $t$ Sekunden erreichten Punktes $P$. Wir haben zugleich die zu derselben Zeit erlangte Geschwindigkeit des bewegten Körpers angegeben, welche sich aus einer horizontalen Geschwindigkeit $u$ und einer vertikalen $v$ zusammensetzte; es war

$$2)\qquad u = b, \quad v = c - gt.$$

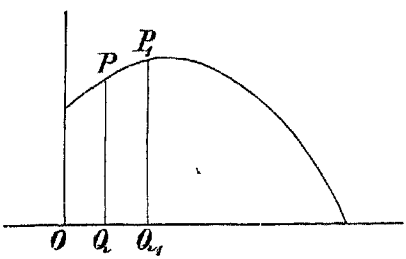
Da aber die Bewegung durch die Gleichungen 1) vollkommen wiedergegeben wird, so muss es möglich sein, alle Merkmale der Bewegung aus jenen Gleichungen zu entnehmen. Ein solches Merkmal ist die Geschwindigkeit, die in den Gleichungen 2) direkt zum

Ausdruck gebracht ist, und man kann demnach fragen, **wie die Gleichungen 2) aus 1) abgeleitet werden.**

Halten wir irgend einen Wert von $t$ fest und nennen $t_1$ einen grösseren Wert in dem Intervall (vorausgesetzt dass $t < m$). Nach $t_1$ Sekunden befinde sich der Körper im Punkte $P_1$, vertikal über $Q_1$; hat $P_1$ die Koordinaten $x_1, y_1$, so ist

$$x_1 = bt_1, \quad y_1 = a + ct_1 - \tfrac{1}{2} g t_1^2.$$

Fig. 9.




Die Strecke $PP_1$ in der Bahn wird zurückgelegt in $t_1 - t$ Sekunden; dabei rückt der Körper um

$$x_1 - x = OQ_1 - OQ = QQ_1$$

in horizontaler Richtung vor, in vertikaler um $y_1 - y$ (was auch negativ sein kann). Es ist

$$x_1 - x = b(t_1 - t), \quad y_1 - y = c(t_1 - t) - \frac{g}{2}(t_1^2 - t^2),$$

mithin, da $t_1 - t$ von Null verschieden,

$$\frac{x_1 - x}{t_1 - t} = b, \quad \frac{y_1 - y}{t_1 - t} = c - \frac{g}{2}(t_1 + t).$$

Diese Quotienten stellen das Verhältnis des in horizontaler resp. in vertikaler Richtung zurückgelegten Weges zu der dabei verfliessenden Zeit dar. Der erste Quotient hat den konstanten Wert $b$; es werden in horizontaler Richtung $b$ Meter in der Sekunde durchlaufen, gleichviel welchen Ausgangspunkt man nimmt; das konstante Verhältnis ist daher als horizontale Geschwindigkeit zu bezeichnen und so ergiebt sich $u = b$. Der zweite Quotient

$$3) \qquad \frac{y_1 - y}{t_1 - t} = c - gt - \frac{g}{2}(t_1 - t)$$

ist nicht konstant, sondern von $t$ und $t_1$ abhängig. Er kann als die durchschnittliche Vertikalgeschwindigkeit auf der Bahnstrecke $PP_1$ bezeichnet werden. Allein die Geschwindigkeit, deren Erklärung wir suchen, hat mit dem Punkte $P_1$ nichts zu thun, sondern sie bezieht sich nur auf den Punkt $P$. Nun ist in der That im Ausdruck 3) der eine Teil nur von $t$ abhängig, nämlich

$$c - gt,$$

und der hiervon in Abzug zu bringende Term

$$\tfrac{1}{2} g (t_1 - t),$$

der allerdings auch $t_1$ enthält, kommt um so weniger in Betracht, je kürzer man die Strecke $PP_1$, d. h. je näher an $t$ man den Wert $t_1$ annimmt. Diese Bemerkung führt zum gewünschten Ziele, wenn man daran denkt, dass es sich bei jeder Zahl, die man praktisch verwenden will, oder die aus Beobachtungen herrührt, nur um eine begrenzte Genauigkeit handeln kann. Begnügt man sich z. B. bei jener Durchschnittsgeschwindigkeit mit vier Decimalstellen, so lässt man einen Fehler bis zum Betrage von 0,00005 zu. Nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, dass ein Fehler bis zum Betrage $\varepsilon$ gestattet wird, wo $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl bedeutet. Man berechne die positive Zahl

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{g}$$

und beschränke $t_1$ auf die Werte zwischen $t$ und $t+\delta$, so dass

$$t < t_1 < t+\delta, \quad 0 < t_1 - t < \delta, \quad 0 < \tfrac{1}{2} g(t_1 - t) < \varepsilon;$$

dann ist

$$\frac{y_1 - y}{t_1 - t} = c - gt \quad \text{mit erlaubtem Fehler.}$$

Der Einfluss der Variablen $t_1$ ist jetzt beseitigt; es tritt nur der festgehaltene Wert $t$ auf, das Resultat ist durch den Punkt $P$ allein bestimmt und als die vertikale Geschwindigkeit im Punkte $P$ zu bezeichnen. So entsteht die Formel $v = c - gt$.

Wir konnten auch, vorausgesetzt dass $t$ nicht Null, unter $t_1$ einen kleineren Wert aus dem Intervall verstehen. Es war dann $t_1$ auf die Werte zwischen $t$ und $t-\delta$ zu beschränken, so dass

$$t > t_1 > t - \delta, \quad 0 < t - t_1 < \delta, \quad 0 < \tfrac{1}{2} g(t - t_1) < \varepsilon.$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$t_1 - t = \xi, \quad -\tfrac{1}{2} g(t_1 - t) = \eta$$

und lässt $t_1$ nur zwischen $t-\delta$ und $t+\delta$ variieren, wobei jedenfalls $t$ selbst als Wert von $t_1$ nicht zugelassen wird, so hat man:

$$\operatorname{abs} \xi < \delta, \quad \operatorname{abs} \eta < \varepsilon.$$

Demgemäss wird zwar der Quotient

$$\frac{y_1 - y}{t_1 - t} = v + \eta$$

niemals gleich $v$, aber er wird durch $v$ dargestellt mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit. Man nennt deshalb $v$ den „Grenzwert (limes), dem der Quotient zustrebt, wenn $t_1$ sich dem Grenzwerte $t$ nähert", und schreibt:

$$v = \lim \frac{y_1 - y}{t_1 - t} \quad \text{für} \quad \lim t_1 = t.$$

Es war $t$ festzuhalten und $t_1$ zu variieren; in Rücksicht darauf erscheint jener Quotient als eine Funktion von $t_1$ und mag mit $f(t_1)$ bezeichnet werden. Die Funktion

$$f(t_1) = v + \eta$$

ist nicht definiert für $t_1 = t$; wenn also auf der rechten Seite sich $v$ ergiebt für $t_1 = t$, so ist man darum nicht berechtigt, $v$ den „Wert der Funktion für $t_1 = t$" zu nennen. Aber man kann $t_1$ der Zahl $t$ beliebig nähern; durch hinreichende Annäherung, d. h. durch hinreichende Verkleinerung des abs $\xi$ kann man

$$\text{abs}\, \eta = \text{abs}\, [f(t_1) - v]$$

beliebig klein machen; man hat daher für gewisse Werte von $t_1$:

$$f(t_1) = v \quad \text{mit beliebig kleinem Fehler}$$

und nennt $v$ den „Grenzwert der Funktion für $\lim t_1 = t$".

Es sei jetzt allgemein die Variable $y$ als Funktion des Argumentes $x$ gegeben in irgend einem Gebiete. Mit $a$ werde eine Zahl bezeichnet, der die Variable $x$, indem sie von $a$ verschieden bleibt, sich beliebig nähern kann ($a$ braucht nicht zum Gebiete von $x$ zu gehören). Wie das vorangeschickte Beispiel lehrt, kann der Fall eintreten, dass für alle von $a$ verschiedenen Werte der Variablen $x$, die hinreichend nahe bei $a$ liegen, $y$ mit einer beliebig vorgeschriebenen Genauigkeit ausgedrückt wird durch eine Zahl $b$. Man sagt alsdann:

> $y$ strebt dem Grenzwerte $b$ zu, wenn $x$ sich (innerhalb seines Gebietes) dem Grenzwerte $a$ nähert,

und schreibt:

$$b = \lim y \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

Ein „Wert der Funktion $y$ für $x = a$" braucht nicht zu existieren, da $a$ nicht zum Gebiete von $x$ zu gehören braucht, und wenn er existiert, so braucht er nicht mit $b$ zusammenzufallen.

Die Funktion $y$ soll in einer beliebig vorgeschriebenen Nähe der Zahl $b$ bleiben für alle $x$, die hinreichend nahe bei $a$ liegen, ausgenommen $a$ selbst. Was die Aussage „die Variable $z$ befindet sich in gewisser Nähe der Zahl $c$" bedeutet, ist für endliche und unendliche Werte von $c$ in § 4 (Seite 15) erklärt worden. In Rücksicht auf diese Erklärung führen wir zuerst eine Variable $\xi$ ein und setzen

$$\xi = x - a, \quad \text{wenn } a \text{ endlich ist,}$$
$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \text{wenn } a = \infty.$$

Dann ergiebt sich ein bestimmtes Gebiet für die Variable $\xi$, welche sich der Null beliebig nähern kann, ohne dass die Null zum Gebiete von $\xi$ zu gehören braucht, und es wird $x$ eine Funktion von $\xi$:

$$x = \xi + a, \quad \text{resp.} \quad x = \frac{1}{\xi},$$

demnach auch $y$ eine Funktion von $\xi$ (§ 6 Seite 31). Führen wir ferner eine Variable $\eta$ ein und setzen

$$\eta = y - b, \quad \text{wenn } b \text{ endlich ist,}$$
$$\eta = \frac{1}{y}, \quad \text{wenn } b = \infty,$$

so kann man $\eta$ als eine Funktion von $x$ oder von $\xi$ auffassen. Man soll nun $y$ in eine gewisse Nähe von $b$ bringen, d. h. es ist eine positive Zahl $\varepsilon$ gegeben, und es soll abs $\eta < \varepsilon$ werden. Der Voraussetzung nach lässt sich dies erreichen, indem man $x$ in gewisse Nähe von $a$ bringt, aber nicht der Zahl $a$ gleich werden lässt*, d. h. man braucht nur eine geeignete positive Zahl $\delta$ zu ermitteln und $0 < \text{abs}\, \xi < \delta$ zu machen. Die Zahl $\varepsilon$ durfte man beliebig klein auswählen; $\delta$ kann man hinreichend klein berechnen, wie auch $\varepsilon$ gegeben sei.

*Es wird also $b$ der Grenzwert von $y$ für $\lim x = a$ genannt, wenn man im stande ist, wie klein auch die positive Zahl $\varepsilon$ gegeben sei, eine positive Zahl $\delta$ derart zu bestimmen, dass für alle von Null verschiedenen Beträge von $\xi$, die kleiner als $\delta$ sind, der Betrag von $\eta$ kleiner als $\varepsilon$ ausfällt.* Man hat dann zugleich:

$$b = \lim y \ \text{ für } \lim \xi = 0, \quad 0 = \lim \eta \ \text{ für } \lim x = a,$$
$$0 = \lim \eta \ \text{ für } \lim \xi = 0.$$

Insbesondere ist

$$\lim x = a \ \text{ für } \lim x = a.$$

Bei ihrer Annäherung an den Grenzwert Null braucht die Funktion $\eta$ sich nicht auf einer und derselben Seite der Null zu bewegen. Wenn jedoch $\eta$ zuletzt (d. h. nachdem der absolute Wert

* Den Wert $x = a$ darf man nur dann mitbenutzen, wenn auch bei $x = a$ ein Wert der Funktion $y$ gegeben ist und dieser Wert von $b$ nicht differiert. Ist dagegen $y = b'$ bei $x = a$ gegeben und $b'$ von $b$ verschieden, so hat $\eta$ bei $\xi = 0$ einen von Null verschiedenen Wert $\beta$, und wenn man $\varepsilon <$ abs $\beta$ wählt, so werden bei noch so kleinem $\delta$ niemals alle abs $\eta < \varepsilon$ sein für abs $\xi < \delta$.

von $\xi$ bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat) nur positive Werte durchläuft, so kann man schreiben:

$$\lim \eta = +0, \quad \lim y = b + 0 \quad \text{resp.} \quad = +\infty,$$

um anzudeuten, dass $y$ zuletzt nie unter den endlichen Wert $b$ sinkt, beziehungsweise dass $y$ zuletzt keine negativen Werte mehr annimmt. Hat dagegen $\eta$ zuletzt nur negative Werte, so kann man schreiben:

$$\lim \eta = -0, \quad \lim y = b - 0 \quad \text{resp.} \quad = -\infty,$$

um anzudeuten, dass $y$ zuletzt nie den endlichen Wert $b$ übertrifft, beziehungsweise dass $y$ zuletzt keine positiven Werte mehr annimmt.

Die gleiche Unterscheidung ist bei der Variablen $\xi$ zu machen. Man schreibt:

$$\lim \xi = +0, \quad \lim x = a + 0 \quad \text{resp.} \quad = +\infty,$$

wenn $x$ nur abnehmend sich der endlichen Zahl $a$ nähern, beziehungsweise wenn $x$ durch eine Reihe von positiven Zahlen hindurch sich ins Unendliche entfernen soll. Man schreibt:

$$\lim \xi = -0, \quad \lim x = a - 0 \quad \text{resp.} \quad = -\infty,$$

wenn $x$ nur zunehmend sich der endlichen Zahl $a$ nähern, beziehungsweise wenn $x$ durch eine Reihe von negativen Zahlen hindurch sich ins Unendliche entfernen soll. Nehmen wir nun an, dass zwei Gebiete, in deren jedem $\xi$ sich nur von einer Seite der Null nähern kann, zu einem neuen Gebiete zusammengefügt werden. In dem einen Abschnitt dieses Gebietes nimmt $\xi$ beliebig kleine positive Werte an, $y$ kann daselbst einem Grenzwerte $b_1$ zustreben für $\lim \xi = +0$; in dem anderen kann $y$ einen Grenzwert $b_2$ für $\lim \xi = -0$ besitzen. Wenn beide Grenzwerte existieren, so brauchen sie einander nicht gleich zu sein; sind aber beide vorhanden und überdies einer Zahl $b$ gleich, so ist $b$ der Grenzwert von $y$ für $\lim \xi = 0$ zu nennen.

*Wenn $x$ sich der Zahl $a$ nur zunehmend nähert und $y$ dabei niemals abnimmt, so existiert der Grenzwert*

$$\lim y = b \quad \text{für} \quad \lim x = a - 0 \quad \text{resp.} \quad = +\infty,$$

*wo $b$ die obere Grenze der $y$ für $x < a$ bedeutet;* denn wie nahe an $b$ auch die Zahl $b' < b$ gewählt werde, immer giebt es unter den zu $x < a$ gehörigen $y$ eine in $b$ oder zwischen $b'$ und $b$ gelegene Zahl; gehört ein solches $y$ etwa zu $x = a'$, so ist $y > b'$, sobald $x$ zwischen $a'$ und $a$ liegt. *Wenn $x$ sich der Zahl $a$ nur zunehmend nähert und $y$ dabei niemals zunimmt, so existiert der Grenzwert*

$$\lim y = b \quad \text{für} \quad \lim x = a - 0 \quad \text{resp.} \quad = +\infty,$$

*wo $b$ die untere Grenze der $y$ für $x < a$ bedeutet. Wenn $x$ sich der Zahl $a$ nur abnehmend nähert, $y$ dabei entweder niemals abnimmt oder niemals zunimmt, und $b$ im ersten Falle die obere, im zweiten die untere Grenze der $y$ für $x > a$ bedeutet, so ist*

$$\lim y = b \quad \text{für} \quad \lim x = a + 0 \quad \text{resp.} \quad = -\infty.$$

Hieraus fliessen folgende **Eigenschaften der Potenz und des Logarithmus**:

Ist $m$ eine beliebige endliche Zahl, $a$ endlich und positiv, so hat man:

$$a^m = \lim a^x \quad \text{für} \quad \lim x = m, \qquad a^m = \lim x^m \quad \text{für} \quad \lim x = a,$$

wobei $a^m$, $a^x$ und $x^m$ positiv angenommen werden (siehe § 5 Satz 6. und 13). Bei $a > 1$ ist (vergl. § 5 Satz 1):

$$\lim a^x = +\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty, \qquad \lim a^x = 0 \quad \text{für} \quad \lim x = -\infty,$$

dagegen bei $0 < a < 1$:

$$\lim a^x = 0 \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty, \qquad \lim a^x = +\infty \quad \text{für} \quad \lim x = -\infty.$$

Endlich ist bei $m > 0$:

$$\lim x^m = 0 \quad \text{und} \quad \lim x^{-m} = +\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +0,$$

$$\lim x^m = +\infty \quad \text{und} \quad \lim x^{-m} = 0 \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty.$$

Sind $a$ und $b$ positive endliche Zahlen, $b$ von Eins verschieden, so hat man (§ 5 extr.):

$$^b\log a = \lim {}^b\log x \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

Bei $b > 1$ ist

$$\lim {}^b\log x = -\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +0, \qquad \lim {}^b\log x = +\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty,$$

dagegen bei $0 < a < 1$

$$\lim {}^b\log x = +\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +0, \qquad \lim {}^b\log x = -\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty.$$

In Rücksicht auf diese Sätze führt man noch folgende Potenzen und Logarithmen ein:

$$a^{+\infty} = \infty, \quad a^{-\infty} = 0 \quad \text{bei} \quad a > 1,$$

$$a^{+\infty} = 0, \quad a^{-\infty} = \infty \quad \text{bei} \quad 0 < a < 1,$$

$$0^m = 0, \quad 0^{-m} = \infty, \quad (+\infty)^m = \infty, \quad (+\infty)^{-m} = 0 \quad \text{bei} \quad m > 0,$$

$$^b\log 0 = -\infty, \quad {}^b\log(+\infty) = +\infty \quad \text{bei} \quad b > 1,$$

$$^b\log 0 = +\infty, \quad {}^b\log(+\infty) = -\infty \quad \text{bei} \quad 0 < b < 1.$$

Wir beziehen uns noch einmal auf das Beispiel, von dem wir ausgegangen sind. Dort war

$$f(t_1) = \frac{y_1 - y}{t_1 - t}, \quad \xi = t_1 - t, \quad \eta = f(t_1) - v,$$

und bei der auf Seite 39 näher angegebenen Bedeutung der Zahlen $\varepsilon$ und $\delta$ war abs $\eta < \varepsilon$, sobald abs $\xi < \delta$ war. Die Zeit $\xi$ verfliesst, während die Bahnstrecke $PP_1$ zurückgelegt wird; nimmt man für $\xi$ einen Wert zwischen $-\delta$ und $+\delta$, so stellt die Durchschnittsgeschwindigkeit $f(t_1)$ die Geschwindigkeit $v$ mit erlaubtem Fehler dar; mit diesem Fehler $\eta$ ist, wenn man $\xi$ dem absoluten Betrage nach verkleinert, $f(t_1)$ als konstant zu betrachten. Einen solchen Zeitraum $\xi$, innerhalb dessen für den vorschwebenden Zweck einzelne Momente nicht mehr zu unterscheiden sind, nennt man **unendlich klein in Rücksicht auf diesen Zweck.** Dieselbe Benennung ist auf die entsprechenden Werte von $\eta$ anzuwenden; wenn $\xi$ zwischen $-\delta$ und $+\delta$ liegt, so sind die Schwankungen von $f(t_1)$ „unendlich klein", $f(t_1)$ von dem festen Werte $v$ „unendlich wenig" verschieden.

Kehren wir nun zur allgemeinen Betrachtung zurück und setzen wir voraus, dass

$$\lim \eta = 0 \quad \text{für} \quad \lim \xi = 0.$$

Wenn man $\delta$ passend wählt, so wird abs $\eta < \varepsilon$ für abs $\xi < \delta$, wie klein auch $\varepsilon$ gegeben sei. Begnügt man sich also bei der Berechnung von $\eta$ mit der durch die Zahl $\varepsilon$ begrenzten Genauigkeit, so kann man $\xi$ beliebig zwischen $-\delta$ und $+\delta$ wählen; in Rücksicht auf die geforderte Genauigkeit heissen diese Werte von $\xi$ **unendlich klein,** ebenso die entsprechenden Werte von $\eta$. Ist die Differenz zweier Zahlen unendlich klein, so sagt man, die Zahlen seien einander **unendlich nahe,** von einander **unendlich wenig verschieden.** Der Wert einer Variablen heisst **unendlich gross,** wenn der reciproke Wert unendlich klein ist. Mit Benutzung dieser Ausdrücke wird man sagen: „$\eta$ wird unendlich klein mit $\xi$", und: „$y$ kommt der Zahl $b$ unendlich nahe (resp. $y$ wird unendlich gross), wenn $x$ der Zahl $a$ unendlich nahe kommt (resp. wenn $x$ unendlich gross wird)".

Eine Zahl, die bei der einen Gelegenheit unendlich klein oder unendlich gross ist, braucht es nicht bei jeder anderen zu sein.

Alle diese Betrachtungen lassen sich durch die Bemerkung verallgemeinern, dass $y$ ebensowenig eine Funktion von $x$ zu sein braucht, wie $x$ eine stetige Variable zu sein brauchte. Es genügt, wenn jedem Werte von $\xi$ eine oder mehrere, sogar unendlich viele Zahlen irgendwie zugeordnet sind und $y$ jede beliebige der zu $\xi$ (oder überhaupt zu den Gebietsstellen von $-\xi$ bis $+\xi$) gehörigen Zahlen bedeuten darf.* Die Erklärung der Grenzwerte und der un-

* In dieser Weise sind in § 17 die Grössen $w$ und $\varrho$ von $h$ abhängig.

endlich kleinen Werte bleibt dann bestehen. Von dem Begriff der unendlich kleinen Zahlen hat die Infinitesimalrechnung ihren Namen, welche im wesentlichen aus der Differentialrechnung und der Integralrechnung besteht.

## § 9. Sätze über Grenzwerte.

Nehmen wir an, dass zwischen zwei Variablen $x$ und $y$ die im vorigen Paragraphen auf Seite 40 angegebene Beziehung besteht, und zwar in der am Ende desselben angedeuteten Ausdehnung, und behalten wir die daselbst eingeführten Bezeichnungen bei, indem wir jedoch unter $b$ eine endliche Zahl verstehen. Dem Werte $x_1$, welcher aus dem Gebiete von $x$, verschieden von $a$ (nicht notwendig von $x$) genommen werde, sei $y_1$ als ein Wert der anderen Variablen zugeordnet; wir führen noch ein:

$$\xi_1 = x_1 - a \quad \text{resp.} \quad = \frac{1}{x_1}, \quad \eta_1 = y_1 - b.$$

Wenn $y$ und $y_1$ endlich sind, so ist

$$y - y_1 = \eta - \eta_1, \quad \operatorname{abs}(y - y_1) < \operatorname{abs}\eta + \operatorname{abs}\eta_1.$$

Strebt nun $y$ dem endlichen Grenzwerte $b$ zu für $\lim x = a$, so bewegen sich, wenn $x$ in gewisser Nähe von $a$ bleibt, die Werte von $y$ zwischen endlichen Grenzen.* Kommen dann $x$ und $x_1$ der Zahl $a$ hinreichend nahe, ohne sie zu erreichen, so sinken die absoluten Beträge von $\eta$ und $\eta_1$ unter eine beliebig gegebene positive Zahl, der absolute Betrag von $y - y_1$ sinkt unter das doppelte derselben Zahl, also ebenfalls unter eine positive Zahl, die beliebig klein vorgeschrieben werden kann. *Besitzt $y$ einen endlichen Grenzwert für $\lim x = a$, so bleiben in gewisser Nähe von $a$ die Werte von $y$ zwischen endlichen Grenzen, und man kann $\operatorname{abs}(y - y_1)$ beliebig klein machen, indem man die von $a$ verschiedenen Werte $x$ und $x_1$ der Zahl $a$ hinreichend nähert.*

Auch die Umkehrung ist richtig:** *Wenn in gewisser Nähe von $a$ die Werte von $y$ endlich bleiben, und es sinkt $\operatorname{abs}(y - y_1)$ unter jede beliebig gegebene Zahl für alle von $a$ verschiedenen $x$ und $x_1$, welche*

* Ist $b$ nicht null, so hat $y$ zuletzt beständig dasselbe Zeichen, nämlich das Zeichen von $b$. Hiernach ist $\operatorname{abs} b = \lim \operatorname{abs} y$ für $\lim x = a$. *Der Betrag des Grenzwertes ist Grenzwert der Beträge.* Dies gilt auch, wenn $b = 0$ oder $b = \infty$.

** Vergl. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, S. 30.

*dem Werte $a$ hinreichend nahe kommen, so strebt $y$ einem endlichen Grenzwerte $b$ zu für $\lim x = a$, und auch $\operatorname{abs}(y - b)$ kann jene Zahl für die bezeichneten Werte von $x$ nicht übersteigen.* Beweis: Wählt man die positive Zahl $\delta$ hinreichend klein, so hat für die dem Betrage nach zwischen 0 und $\delta$ gelegenen $\xi$ die Schwankung der $y$ (§ 4 Seite 17) eine endliche Grösse, und es bewegen sich mithin die $y$ zwischen endlichen Grenzen; die untere werde mit $A_\delta$, die obere mit $B_\delta$ bezeichnet. Verkleinert man $\delta$, so nimmt $A_\delta$ nicht ab, $B_\delta$ nicht zu; also ist, sobald $m$ und $n$ Werte von $\delta$ sind:

$$A_m \leqq B_m \leqq B_n \quad \text{bei} \quad m \leqq n, \qquad A_m \leqq A_n < B_n \quad \text{bei} \quad m > n.$$

Da hiernach immer $A_m \leqq B_n$ ist, so besitzen die Zahlen $A_\delta$ eine endliche obere Grenze $b$, welche keine der Zahlen $B_\delta$ übertrifft. Jetzt sei die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig klein gegeben; der Voraussetzung gemäss kann man $\delta$ so weit verkleinern, dass für die dem Betrage nach zwischen 0 und $\delta$ gelegenen $\xi$ die absoluten Beträge aller Unterschiede der $y$ unter $\varepsilon$ liegen, d. h. dass

$$B_\delta - A_\delta \leqq \varepsilon.$$

Nimmt man jetzt $\xi$ zwischen 0 und $\delta$ oder zwischen 0 und $-\delta$, so wird

$$A_\delta \leqq y \leqq B_\delta, \quad A_\delta \leqq b \leqq B_\delta,$$

also

$$\operatorname{abs}(y - b) \leqq B_\delta - A_\delta \leqq \varepsilon.$$

Wie auch die $y$ in dem für $x$ angenommenen Gebiete definiert sein mögen, immer existiert eine untere Grenze ihrer Werte, etwa $g$. Wird nun von den $x$ ein derartiger Teil fortgelassen, dass die zugehörigen $y$ nicht $g$ (also eine grössere Zahl) zur unteren Grenze haben, so ist $g$ auch für keinen Teil dieser $y$ die untere Grenze, wohl aber für diejenigen $y$, welche den zurückgebliebenen $x$ entsprechen. Verstehen wir überhaupt unter $A$ eine Eigenschaft, welche einer Zahlenmenge zukommen kann, jedoch nur in der Weise, dass, wenn jene Eigenschaft einer in Teile I und II zerlegbaren Zahlenmenge zukommt, aber nicht dem Teile I, dieselbe Eigenschaft auch bei dem Teile II vorhanden ist, aber jedem Teile von I fehlt; wenn also ein Teil von I die Eigenschaft $A$ besitzt, so gilt dies auch von I selbst. Es besteht dann der Satz:

*Wenn an den $x$ die Eigenschaft $A$ wahrzunehmen ist, so existiert mindestens eine Stelle von der Beschaffenheit, dass sich in jeder Nähe von ihr Werte der Variablen $x$ vorfinden und diese die Eigenschaft $A$ besitzen.*

Beweis: Wenn die Zahlen $+\infty$ und $-\infty$ die verlangte Beschaffenheit nicht haben, so kann man zwei endliche Zahlen $\alpha$ und $\beta$ ($\alpha < \beta$) derart annehmen, dass ausserhalb des Intervalles ($\alpha \ldots \beta$) entweder keine Werte $x$ liegen oder doch die Eigenschaft $A$ nicht vorhanden ist. Bezeichnet man mit $m$ jede Zahl, unterhalb deren die Eigenschaft $A$ nicht auftritt, so ist jede Zahl $< \alpha$ eine $m$, jede Zahl $> \beta$ ist keine $m$. Die $m$ bilden eine stetige Folge; denn ist $k$ eine $m$ und $l < k$, so ist auch $l$ eine $m$. Die obere Grenze der $m$ ist eine endliche Zahl $t$ ($\alpha < t \leqq \beta$); jede Zahl $< t$ ist eine $m$; ob $t$ selbst zu den $m$ gehört, bleibt dahingestellt. Man nimmt nun die positive Zahl $\delta$ beliebig, $u$ zwischen $t-\delta$ und $t$; wenn Werte $x \leq t-\delta$ existieren, so haben diese nicht die Eigenschaft $A$, weil sonst $u$ keine $m$ wäre. Hingegen giebt es, da $t+\delta$ keine $m$ ist, Werte $x < t+\delta$, und diese haben die Eigenschaft $A$; folglich giebt es Werte $x$ zwischen $t-\delta$ und $t+\delta$, und diese haben die Eigenschaft $A$, d. h. die Zahl $t$ hat die im obigen Satze geforderte Beschaffenheit.

Hiernach gelten u. a. folgende Sätze:*

*Ist $g$ die untere (obere) Grenze der $y$, so existiert mindestens eine Stelle von der Beschaffenheit, dass sich in jeder Nähe von ihr Werte der Variablen $x$ vorfinden und $g$ die untere (obere) Grenze der zugehörigen $y$ ist.*

*Kommen die $y$ einer Zahl $h$ beliebig nahe, so existiert mindestens eine Stelle von der Beschaffenheit, dass sich in jeder Nähe von ihr Werte von $x$ befinden und die zugehörigen $y$ der Zahl $h$ beliebig nahe kommen.*

*Nimmt $x$ unendlich viele Werte an, so existiert mindestens eine Stelle von der Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von ihr unendlich viele Werte $x$ liegen.*

In den folgenden Sätzen tritt ausser $y$ noch eine Variable $z$ auf, die von $x$ auf ähnliche Weise wie $y$ abhängen soll. Da alle vorkommenden Grenzwerte sich auf $\lim x = a$ beziehen werden, so mag dieser Zusatz wegbleiben. Die Sätze bleiben giltig, wenn man statt $y$ oder $z$ Konstanten nimmt; eine Konstante ist dann ihr eigener Grenzwert zu nennen.

*Ist $\lim y = 0$, während der Betrag von $z$ zuletzt* (d. h. nachdem $x$ eine gewisse Annäherung an $a$ erreicht hat) *nicht beliebig gross gemacht werden kann, so ist*

$$\lim yz = 0.$$

---

* Diese Sätze sind von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen mitgeteilt worden.

Beweis: Der Voraussetzung nach steigt abs $z$ zuletzt nicht mehr über eine gewisse positive Zahl $\gamma$, d. h. es ist abs $z < \gamma$, wenn $x$ eine gewisse Annäherung an $a$ beibehält. Jetzt sei die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig gegeben und

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \varepsilon'.$$

Die positive Zahl $\delta$ wähle man so, dass abs $y < \varepsilon'$, wenn $0 <$ abs $\xi < \delta$; für diese $\xi$ ist

$$\text{abs}\, yz = \text{abs}\, y \,.\, \text{abs}\, z < \varepsilon' y, \quad \text{d. i.} \quad < \varepsilon,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt..

*Ist* $\lim y = \infty$, *während der Betrag von* $z$ *zuletzt nicht beliebig klein gemacht werden kann, so ist*

$$\lim yz = \infty.$$

*Ist* $\lim y = 0$, *während der Betrag von* $z$ *zuletzt nicht beliebig klein gemacht werden kann, so ist*

$$\lim \frac{y}{z} = 0, \quad \lim \frac{z}{y} = \infty.$$

Diese beiden Sätze lassen sich leicht auf den vorhergehenden zurückführen, ebenso die beiden ersten Behauptungen im nächsten Satze:

*Ist* $\lim y = \infty$, *während der Betrag von* $z$ *zuletzt nicht beliebig gross gemacht werden kann, so ist*

$$\lim \frac{y}{z} = \infty, \quad \lim \frac{z}{y} = 0, \quad \lim (y + z) = \infty.$$

Um die dritte Behauptung zu rechtfertigen, führen wir $\gamma$ wie oben ein und verstehen unter $\varrho$ eine beliebig grosse positive Zahl, unter $\varrho'$ die Summe $\varrho + \gamma$. Wird die positive Zahl $\delta$ passend gewählt, so ist für $0 <$ abs $\xi < \delta$:

$$\text{abs}\, y > \varrho', \quad \text{abs}\, (y + z) \geqq \text{abs}\, y - \text{abs}\, z > \varrho' - \gamma, \quad \text{d. i.} \quad > \varrho.$$

*Ist* $\lim y = \lim z = +\infty$, *so ist* $\lim (y + z) = +\infty$; *ist* $\lim y = \lim z = -\infty$, *so ist* $\lim (y + z) = -\infty$.

Beweis: Die positive Zahl $\varrho$ sei beliebig gegeben. Ist $\lim y = \lim z = +\infty$, so wähle man die positiven Zahlen $\delta_1$ und $\delta_2$ so, dass

$$y > \frac{\varrho}{2} \quad \text{für} \quad 0 < \text{abs}\, \xi < \delta_1, \quad z > \frac{\varrho}{2} \quad \text{für} \quad 0 < \text{abs}\, \xi < \delta_2,$$

und nenne $\delta$ die kleinere der beiden Zahlen. Für $0 <$ abs $\xi < \delta$ ist dann

$$y > \frac{\varrho}{2}, \quad z > \frac{\varrho}{2}, \quad y + z > \varrho. \quad \text{U. s. w.}$$

Einen ähnlichen Gang verfolgt man beim Beweise des Satzes: *Ist lim $y = b$, lim $z = c$, und sind beide Grenzwerte endlich, so ist*

$$b + c = \lim (y + z),$$

*d. h. die Summe der Grenzwerte ist dann Grenzwert der Summe.* Dieser Satz lässt sich auf die *Differenz* $y - z$ übertragen und auf algebraische Summen von beliebig vielen Gliedern ausdehnen.

*Ist lim $y = b$, lim $z = c$, so ist*

$$bc = \lim yz,$$

*d. h. das Produkt der Grenzwerte ist Grenzwert des Produktes, wenn nicht der eine Grenzwert 0, der andere $\infty$ ist.* Auch dieser Satz lässt sich auf Produkte von beliebig vielen Faktoren ausdehnen. Beim Beweise setzen wir $b$ und $c$ als endliche Zahlen voraus, da der andere Fall schon durch einen früheren Satz erledigt ist.* Auch der Fall, wo der Grenzwert eines Faktors verschwindet, ist schon oben erledigt. Es ist daher

$$\lim (y - b)(z - c) = 0, \quad \lim b(z - c) = 0, \quad \lim c(y - b) = 0,$$
$$\lim (yz - bc) = \lim \{(y - b)(z - c) + b(z - c) + c(y - b)\} = 0,$$
$$\lim yz = bc.$$

*Ist lim $y = b$, lim $z = c$, so ist*

$$\frac{b}{c} = \lim \frac{y}{z},$$

*d. h. der Quotient der Grenzwerte ist Grenzwert des Quotienten, wenn nicht beide Grenzwerte 0 oder $\infty$ sind.*

Beweis: Wir betrachten nur den Fall, wo beide Grenzwerte endlich und von Null verschieden sind; die anderen Fälle sind durch frühere Sätze erledigt. Wir haben also:

$$\lim (cy - bz) = \lim \{c(y - b) - b(z - c)\} = 0, \quad \lim cz = c^2,$$
$$\lim \left(\frac{y}{z} - \frac{b}{c}\right) = \lim \frac{cy - bz}{cz} = 0, \quad \lim \frac{y}{z} = \frac{b}{c}.$$

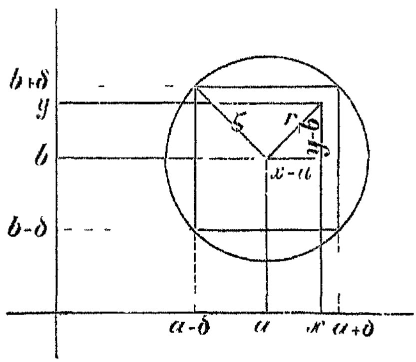
Der Begriff des Grenzwertes und die an ihn geknüpften Sätze lassen sich auf beliebig viele unabhängige Variable ausdehnen. Es wird genügen, wenn wir zwei Independente $x$, $y$ einführen und der Kürze halber nur endliche Zahlen berücksichtigen. Es seien also beliebig viele Wertepaare $x$, $y$ oder, geometrisch gesprochen, Punkte $(x, y)$ gegeben, gleichviel ob stetig aneinander-

* Ist lim $y$ endlich, so wird abs $y$ zuletzt nicht beliebig gross. Ist lim $y$ von Null verschieden, so wird abs $y$ zuletzt nicht beliebig klein.

gereiht oder nicht. Die (absolute) Entfernung des variablen Punktes $(x, y)$ von dem festen Punkte $(a, b)$ wird durch die positiv genommene Quadratwurzel

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

Fig. 10.




dargestellt. Will man nun den Punkt $(x, y)$ dem Punkte $(a, b)$ allmählich nähern, so kann man von einer positiven Zahl $\delta$ ausgehen und zuerst diejenigen Punkte $(x, y)$ sammeln, welche die Bedingungen

$$a-\delta<x<a+\delta,$$
$$b-\delta<y<b+\delta,$$

d. i. abs $(x-a)$ und abs $(y-b)$ $<\delta$ erfüllen, hierauf $\delta$ der Null immer mehr nähern; oder man geht von einer positiven Zahl $\zeta$ aus, sammelt die Punkte $(x, y)$, welche der Bedingung

$$r<\zeta, \quad \text{d. i.} \quad (x-a)^2+(y-b)^2<\zeta^2$$

genügen, und verkleinert $\zeta$ allmählich. Beide Verfahrungsarten lassen sich auf einander zurückführen. Ist abs $(x-a)<\delta$ und abs $(y-b)<\delta$, so hat man:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<\zeta^2, \quad \text{wo} \quad \zeta=\delta\sqrt{2}.$$

Ist $r<\zeta$, so hat man:

$$\text{abs}\,(x-a)<\zeta \quad \text{und} \quad \text{abs}\,(y-b)<\zeta.$$

Der Punkt $(a, b)$ braucht nicht zum Gebiete des veränderlichen Punktes $(x, y)$ zu gehören; wir nehmen aber an, dass der Punkt $(x, y)$, indem er vom Punkte $(a, b)$ verschieden bleibt, sich doch dem letzteren *beliebig* nähern kann, d. h. dass für jeden noch so kleinen Wert der positiven Zahl $\delta$ bezw. $\zeta$ Punkte $(x, y)$ existieren, für welche

$$0<\text{abs}\,(x-a)<\delta \quad \text{und} \quad 0<\text{abs}\,(y-b)<\delta, \quad \text{bezw.} \quad 0<r<\zeta.$$

Wir nehmen ferner an, dass jedem Punkte $(x, y)$ eine oder mehrere oder unendlich viele Zahlen $z$ zugeordnet sind. Wenn alsdann für alle von $(a, b)$ verschiedenen Punkte $(x, y)$, welche hinreichend nahe bei jenem liegen, $z$ mit einer beliebig vorgeschriebenen Genauigkeit ausgedrückt wird durch eine Zahl $c$, so sagt man: $z$ strebt dem

Grenzwerte $c$ zu, wenn $(x, y)$ sich der Grenzlage $(a, b)$ nähert, und kann schreiben:

$$c = \lim z \quad \text{für} \quad \lim (x, y) = (a, b).$$

Diese Relation ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$c = \lim z \quad \text{für} \quad \lim \varrho = 0,$$

wobei $\varrho$ eine positive Variable bedeutet und die $z$ den $\varrho$ zugeordnet werden; nämlich zu jedem $\varrho$ gehören unendlich viele $(x, y)$ mit der Eigenschaft $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \varrho^2$, zu diesen $(x, y)$ gehören (im allgemeinen) unendlich viele $z$, und die letzteren werden jenem $\varrho$ zugewiesen.*

Ist dem Punkte $(x_1, y_1)$, den man im Gebiete von $(x, y)$ verschieden von $(a, b)$ auswählt, $z_1$ als ein Wert der abhängigen Variablen zugeordnet, so gelten die Sätze:

*Besitzt $z$ einen endlichen Grenzwert für $\lim (x, y) = (a, b)$, so bleiben in gewisser Nähe von $(a, b)$ die Werte von $z$ zwischen endlichen Grenzen, und man kann $\operatorname{abs} (z - z_1)$ beliebig klein machen, indem man die von $(a, b)$ verschiedenen Punkte $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$ dem Punkte $(a, b)$ hinreichend nähert.*

*Wenn in gewisser Nähe des Punktes $(a, b)$ die Werte von $z$ endlich bleiben und es sinkt $\operatorname{abs} (z - z_1)$ unter jede gegebene positive Zahl für alle von $(a, b)$ verschiedenen Punkte $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$, welche hinreichend nahe bei $(a, b)$ liegen, so strebt $z$ einem endlichen Grenzwerte $c$ zu für $\lim (x, y) = (a, b)$, und auch $\operatorname{abs} (z - c)$ kann jene Zahl für die bezeichneten Lagen von $(x, y)$ nicht übersteigen.*

Es seien beliebig viele Punkte $(x, y)$ gegeben, welche aus einem endlichen Gebiete nicht heraustreten, d. h. deren Koordinaten sich zwischen endlichen Grenzen bewegen. Nennen wir $A$ eine Eigenschaft, welche einer Punktmenge zukommen kann, jedoch nur in der Weise, dass, wenn jene Eigenschaft einer in Teile I und II zerlegbaren Punktmenge zukommt, aber nicht dem Teile I, dieselbe Eigenschaft auch an dem Teile II wahrgenommen wird, aber nicht an irgend einem Teile von I, so gilt der Satz:

*Wenn an den Punkten $(x, y)$ die Eigenschaft $A$ wahrzunehmen ist, so existiert mindestens ein Punkt von der Beschaffenheit, dass sich in jeder Nähe von ihm Punkte $(x, y)$ vorfinden und diese die Eigenschaft $A$ besitzen.*

Beweis: Wenn man bloss die vorkommenden Abscissen $x$ in Betracht zieht, so kann man den Umstand, dass zu den $x$ gewisse $y$

* Der Betrag des Grenzwertes ist Grenzwert der Beträge.

und mithin gewisse Punkte $(x, y)$ gehören, und dass diese Punkte die Eigenschaft $A$ besitzen, als eine Eigenschaft $A'$ der $x$ auffassen, von demselben Charakter wie die Eigenschaft $A$. Folglich giebt es (Seite 46) eine endliche Zahl $t$ derart, dass in jeder Nähe bei $t$ Werte von $x$ liegen und diese die Eigenschaft $A'$ besitzen. An den Punkten $(x, y)$ wird demnach eine Eigenschaft $B$ bemerkt, welche wieder von demselben Charakter ist wie die Eigenschaft $A$ und darin besteht, dass, wie klein man auch die positive Zahl $\delta$ wählen mag, immer Punkte $(x, y)$ existieren, deren Abscissen zwischen $t-\delta$ und $t+\delta$ liegen, und dass diese Punkte die Eigenschaft $A$ besitzen. Zieht man jetzt bloss die vorkommenden Ordinaten $y$ in Betracht, so kann man den Umstand, dass zu den $y$ gewisse $x$ und mithin gewisse Punkte $(x, y)$ gehören, und dass diese Punkte die Eigenschaft $B$ besitzen, als eine Eigenschaft $B'$ der $y$ auffassen, von demselben Charakter wie die Eigenschaft $A$. Folglich giebt es (Seite 46) eine endliche Zahl $u$ derart, dass in jeder Nähe bei $u$ Werte von $y$ liegen und diese die Eigenschaft $B'$ besitzen. Wählt man also die positive Zahl $\delta'$ beliebig, so existieren immer Punkte $(x, y)$, deren Ordinaten zwischen $u-\delta'$ und $u+\delta'$ liegen, und diese Punkte besitzen die Eigenschaft $B$, d. h. wie klein auch die positiven Zahlen $\delta$ und $\delta'$ angenommen werden, immer existieren Punkte $(x, y)$, deren Abscissen zwischen $t-\delta$ und $t+\delta$, deren Ordinaten zwischen $u-\delta'$ und $u+\delta'$ fallen, und diese Punkte besitzen die Eigenschaft $A$. Wählt man die positive Zahl $\zeta$ beliebig und nimmt dann $\delta=\delta'=\frac{\zeta}{\sqrt{2}}$, so wird

$$(x-t)^2+(y-u)^2<\zeta^2, \quad \text{wenn} \quad \operatorname{abs}(x-t) \quad \text{und} \quad \operatorname{abs}(y-u)<\delta.$$

Demnach liegen immer Punkte $(x, y)$ innerhalb des um den Punkt $(t, u)$ mit dem Halbmesser $\zeta$ beschriebenen Kreises, und diese $(x, y)$ besitzen die Eigenschaft $A$.

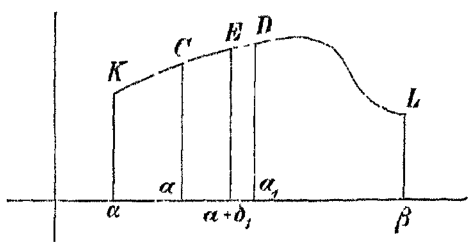
An diese Sätze schliessen sich Folgerungen an, welche den für eine unabhängige Variable auf Seite 47 bis 49 aufgeführten entsprechen.

## § 10. Kontinuität.

Da stetige Planlinien durch Funktionen von einer Independenten dargestellt werden, so spricht man auch von stetigen oder kontinuierlichen Funktionen. Jede Linie im engsten Sinne des Wortes ist stetig, d. h. jeder Punkt der Linie ist mit jedem anderen durch einen Teil der Linie verbunden; erst wenn der Begriff der Linie gewisse Erweiterungen erfahren hat, so dass die Teile einer Linie mit einander nicht mehr zusammenzuhängen brauchen, ist es möglich, von Unstetigkeit zu sprechen.

Eine stetige ebene Linie $KL$, innerhalb deren jede Abscisse nur einmal vorkommt (Seite 35), werde von einem Punkte $P$ mit den rechtwinkligen Koordinaten $xy$ durchlaufen; die Abscisse $x$ variiert von einem endlichen kleinsten Werte $\alpha$ bis zu einem endlichen grössten Werte $\beta$. Fassen wir irgend einen Punkt $C\,(a,\,b)$ der Linie ins Auge. Schreitet man (bei $\alpha < \beta$) von $C$ aus in der Linie $CL$ vor, so wird die Linie zuerst steigen oder fallen oder zur Abscissenaxe parallel sein; nehmen wir an, dass sie zuerst steigt und zwar wenigstens bis zum Punkte $D\,(a_1,\,b_1)$.

Fig. 11.




Wenn alsdann der Punkt $P$ die Linie von $C$ bis $D$ durchläuft, so wächst $x$ von $a$ bis $a_1$, $y$ von $b$ bis $b_1$. Wird also eine positive Zahl $\varepsilon$ beliebig ausgesucht, so kann man in der Linie zwischen $C$ und $D$ einen Punkt $E$ angeben, dessen Ordinate zwischen $b$ und $b + \varepsilon$ liegt. Die Abscisse von $E$ bezeichne man mit $a + \delta_1$, wo $\delta_1$ eine positive Zahl ist. Variiert $x$ zwischen $a$ und $a + \delta_1$, so variiert $P$ zwischen $C$ und $E$, $y$ zwischen $b$ und der Ordinate von $E$. Also ist $0 < y - b < \varepsilon$ für $0 < x - a < \delta_1$, oder

$$\text{abs}\,(y - b) < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < x - a < \delta_1.$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn die Linie $CL$ von $C$ aus zuerst fällt oder zur Abscissenaxe parallel läuft. Berücksichtigt man aber (bei $a > \alpha$) den anderen Teil der Linie, nämlich $CK$, so ergiebt sich bei geeigneter Wahl der positiven Zahl $\delta_2$:

$$\text{abs}\,(y - b) < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < a - x < \delta_2.$$

Man kann also die positive Zahl $\delta$ so wählen, dass

$$\text{abs}\,(y - b) < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < \text{abs}\,(x - a) < \delta.$$

Auf diese Bemerkung kann man die Definition der Stetigkeit oder Kontinuität einer Funktion gründen. Indem wir von der geometrischen Darstellung ganz absehen, verstehen wir jetzt unter $x$

eine stetige Veränderliche mit der unteren Grenze $\alpha$ und der oberen Grenze $\beta$, unter $y$ eine Funktion von $x$. Ohne zu fordern, dass alle in Betracht kommenden Zahlen endlich seien, nennen wir $y$ stetig oder kontinuierlich bei dem zum Intervall von $x$ gehörigen Werte $a$, wenn der Wert von $y$ daselbst zugleich Grenzwert von $y$ ist für $\lim x = a$; andernfalls sagen wir, $y$ ist an der betreffenden Stelle unstetig oder diskontinuierlich.

Z. B. wenn $m$ irgend eine endliche und von Null verschiedene Zahl bedeutet, so ist die positive Potenz $x^m$ eine stetige Funktion von $x$ in dem Intervall von 0 bis $+\infty$ mit Einschluss der Grenzen; wenn $a$ eine endliche, positive und von Eins verschiedene Zahl bedeutet, so ist ${}^a\log x$ eine stetige Funktion von $x$ in demselben Intervall, die positive Potenz $a^x$ eine stetige Funktion von $x$ in dem Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Einschluss der Grenzen. (Vergl. § 8 Seite 43.)

Überhaupt, *wenn die Werte der Funktion $y = f(x)$ beständig im Wachsen oder beständig im Abnehmen sind, während $x$ zunimmt, und eine stetige Folge mit den Grenzen $A$ und $B$ ($A < B$) bilden, so ist $y$ überall stetig.*

Beweis: Nehmen wir an, dass $y$ beständig mit $x$ wächst, und nennen wir $a_1$ und $a_2$ irgend welche Werte von $x$, $b_1$ und $b_2$ die zugehörigen Funktionswerte; es sei $a_1 < a_2$, also auch $b_1 < b_2$. Wählt man $\xi$ zwischen $a_1$ und $a_2$ beliebig, so ist $a_1 < f(\xi) < a_2$; wählt man $\eta$ zwischen $b_1$ und $b_2$ beliebig, so ist $\eta$ ein Wert der Funktion und gehört zu einem zwischen $a_1$ und $a_2$ gelegenen Werte von $x$. Die Werte von $y$, welche den zwischen $a_1$ und $a_2$ gelegenen Argumentwerten entsprechen, fallen also mit der Gesamtheit der zwischen $b_1$ und $b_2$ eingeschlossenen Zahlen zusammen; folglich ist $b_1$ ihre untere, $b_2$ ihre obere Grenze, überhaupt $b_1$ die untere Grenze aller $y$ für $x > a_1$, $b_2$ die obere Grenze aller $y$ für $x < a_2$. Daraus folgt aber (§ 8 Seite 42f.):

$$\lim y = b_1 \quad \text{für} \quad \lim x = a_1 + 0, \qquad \lim y = b_2 \quad \text{für} \quad \lim x = a_2 - 0,$$

so dass an jeder Stelle $a$ des Intervalles

$$\lim f(x) = f(a) \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

*Wenn $\alpha$ (die untere Grenze der $x$) nicht zum Intervall gehört, so ist $A$ oder $B$ Grenzwert von $y$ für $\lim x = \alpha$*; ist nämlich $y$ im Wachsen mit $x$, so wird $\lim y = A$ für $\lim x = \alpha$; ist dagegen $y$ im Abnehmen bei wachsendem $x$, so wird $\lim y = B$ für $\lim x = \alpha$. *Wenn $\beta$ (die* *obere Grenze der $x$) nicht zum Intervall gehört, so ist $A$ oder $B$ Grenzwert von $y$ für $\lim x = \beta$.*

Eine Funktion ist oft durch Vermittelung einer anderen gegeben. Ist z. B.

$$y = F(r), \quad r = g(x), \quad \text{also} \quad y = F[g(x)],$$

so ist $y$ mittelbar als Funktion von $x$ gegeben (zusammengesetzte Funktion). Es sei $x_0$ ein Wert von $x$ und

$$g(x_0) = r_0, \quad F(r_0) = y_0.$$

*Wenn die „vermittelnde“ Funktion $g(x)$ bei $x = x_0$ stetig ist und $F(r)$ bei $r = r_0$, so ist $y$ stetig bei $x = x_0$.* Denn wenn $y$ in gegebener Nähe von $y_0$ bleiben soll, so braucht man nur $r$ in gewisser Nähe von $r_0$ festzuhalten, und dies wird erreicht, wenn man $x$ hinreichend nahe bei $x_0$ annimmt. Ist also $\lim y = b$ für $\lim x = a$ und $F(y)$ eine stetige Funktion bei $y = b$, so ist

$$\lim F(y) = F(\lim y) \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

*Ist die Funktion $y$ bei $x = a$ stetig und endlich, $b$ der Funktionswert an dieser Stelle, $\gamma$ von $b$ verschieden, so ist für die hinreichend nahe an $a$ gelegenen $x$ die untere Grenze der $y$ grösser als $\gamma$, wenn $b > \gamma$ ist, hingegen die obere Grenze kleiner als $\gamma$, wenn $b < \gamma$ ist.* Liegt nämlich die Zahl $c$ zwischen $b$ und $\gamma$, so bleiben alle $y$ dem Werte $b$ näher als die Zahl $c$, wenn man $x$ in gewisser Nähe von $a$ festhält; ist nun $b > \gamma$, also $b > c > \gamma$, so sinken jene $y$ nicht bis $c$; ist $b < \gamma$, also $b < c < \gamma$, so steigen sie nicht bis $c$. Und *wenn die Funktion $y$ bei $x = a$ stetig ist, ohne endlich zu sein, während $\gamma$ eine endliche Zahl bedeutet, so bleiben für die hinreichend nahe an $a$ gelegenen $x$ alle $y$ in beliebig vorgeschriebener Entfernung von $\gamma$.*

*Ist die Funktion $y$ stetig in dem ganzen Intervall mit Einschluss der Grenzen, und kann sie der Zahl $\gamma$ beliebig nahe kommen, so erreicht sie den Wert $\gamma$ mindestens für einen Wert von $x$.** Nach § 9 (Seite 47) giebt es nämlich in dem Intervall mindestens einen Wert $a$ derart, dass die $y$ der Zahl $\gamma$ beliebig nahe kommen können, wenn man die $x$ in beliebiger Nähe von $a$ festhält. An dieser Stelle wird $y = \gamma$; denn sonst könnte man nach dem vorigen Satze die $x$ auf eine solche Nähe an $a$ beschränken, dass die $y$ der Zahl $\gamma$ nicht beliebig nahe kommen. *Insbesondere wenn der absolute Betrag von $y$ beliebig kleine Werte annehmen kann, so verschwindet $y$ wenigstens*

---

* Dieser Satz rührt von Weierstrass her. Vergl. die Bemerkung von Cantor, Crelles Journal Bd. 72 S. 141.

*einmal; wenn der absolute Betrag von $y$ beliebig grosse Werte annehmen kann, so wird $y$ wenigstens einmal unendlich.*

Nennen wir $A$ die untere, $B$ die obere Grenze der Funktionswerte in dem betrachteten Intervall. *Wenn die Funktion von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ mit Einschluss der Grenzen stetig ist, so sind $A$ und $B$ Werte der Funktion, also $A$ der kleinste, $B$ der grösste Wert.*

*Wenn $y$ von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ mit Einschluss der Grenzen stetig und endlich ist, so sind auch $A$ und $B$ endliche Grössen; mithin haben die absoluten Beträge der $y$ dann ebenfalls eine endliche obere Grenze.*

Unter Beibehaltung dieser Voraussetzung sei $\gamma$ ein Wert, den $y$ in dem betrachteten Intervall nicht annimmt. Bei $x=\alpha$ sei $y>\gamma$. Nennen wir $m$ jeden Wert im Intervall von der Art, dass von $\alpha$ bis $m$ einschliesslich die $y$ grösser als $\gamma$ sind, und $a$ die obere Grenze der $m$, so sind von $\alpha$ bis $a$ ausschliesslich die $y$ grösser als $\gamma$. Bei $x=a$ sei $y=b$; für die hinreichend nahe bei $a$ gelegenen $x$ sind alle $y$ grösser als $\gamma$, wenn $b>\gamma$, alle $y$ kleiner als $\gamma$, wenn $b<\gamma$; folglich muss $b>\gamma$ sein, überhaupt $y>\gamma$ in gewisser Nähe bei $a$. Hiernach gehört $a$ selbst zu den Werten $m$, kann aber von $\beta$ nicht verschieden sein, da es sonst Werte von $m$ gäbe, die $a$ übersteigen, und es ist somit durchweg $y>\gamma$. Ist $y<\gamma$ bei $x=\alpha$, so ist $y$ durchweg $<\gamma$.

*Ist also die Funktion $y$ überall zwischen $\alpha$ und $\beta$ stetig und endlich, und liegt $\gamma$ zwischen der oberen und unteren Grenze der zwischen $\alpha$ und $\beta$ vorkommenden Funktionswerte, so gehört $\gamma$ selbst zu diesen Werten.* Denn nimmt man zwischen $\alpha$ und $\beta$ die Werte $x_1$ und $x_2$ so, dass von den entsprechenden Funktionswerten der eine grösser, der andere kleiner als $\gamma$ ist, so kann $y$ zwischen $x_1$ und $x_2$ nicht überall von $\gamma$ verschieden sein.

Wenn $\alpha$ oder $\beta$ oder $\alpha$ und $\beta$ zum Intervall hinzutreten und $y$ dabei stetig bleibt, so ändern sich die Grenzen von $y$ nicht. *Die Werte der Funktion $y$ bilden auch dann eine stetige Folge; es kommt jede zwischen $A$ und $B$ gelegene Zahl vor.* Insbesondere wenn $y$ nicht überall einerlei Zeichen hat, so muss $y$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ wenigstens einmal verschwinden.

Wenden wir uns für einen Augenblick von der Betrachtung des ganzen Intervalles zu der einer einzelnen Stelle zurück. *Wenn $y$ bei $x=a$ stetig und endlich ist, so bleibt $y$ in gewisser Nähe von $a$ endlich und abs $(y-y_1)$ fällt unter jede beliebig gewählte positive Zahl für alle bei $a$ hinreichend nahen $x$ und $x_1$, wo auch $x_1$ einen Wert der Independenten, $y_1$ den zugehörigen Wert der Funktion bedeuten* *soll*, und umgekehrt. Ist $a$ endlich, $y$ bei $x = a$ stetig und endlich, $\varepsilon$ eine beliebige positive Zahl, so bleibt abs $(y - y_1) < \varepsilon$, so lange abs $(x - a)$ und abs $(x_1 - a)$ eine hinreichend kleine positive Zahl $\delta$ nicht erreichen. Diese Zahl $\delta$ ist von $\varepsilon$ abhängig, aber durch $\varepsilon$ nicht vollkommen bestimmt; wenn für $\delta$ irgend ein Wert angenommen werden kann, so ist auch jeder kleinere Wert zulässig. Die obere Grenze aller Werte von $\delta$ mag mit $d$ bezeichnet werden. Nicht nur jede unter $d$ liegende positive Zahl, sondern auch $d$ selbst ist ein Wert von $\delta$, d. h. für abs $(x - a)$ und abs $(x_1 - a) < d$ ist stets abs $(y - y_1) < \varepsilon$; denn man kann zwischen $d$ und der grösseren der beiden Zahlen abs $(x - a)$, abs $(x_1 - a)$ einen Wert $d'$ einschalten u. s. w. Nimmt man aber $\zeta > d$ und unterwirft $x$, $x_1$ nur den Bedingungen abs $(x - a) < \zeta$, abs $(x_1 - a) < \zeta$, so ist (falls nicht alle $x$ in die Strecke von $a - d$ bis $a + d$ fallen) nicht immer abs $(y - y_1) < \varepsilon$, sondern es tritt auch der Fall abs $(y - y_1) > \varepsilon$ ein.

Es sind hier wiederholt Differenzen verschiedener Werte einer Variablen vorgekommen. Wenn nun $z$ und $z_1$ Werte einer Variablen sind, $z$ endlich, also $z_1 = z + (z_1 - z)$, so heisst $z_1 - z$ der Zuwachs oder das Inkrement der Variablen von $z$ bis $z_1$, auch die Differenz, weshalb die Bezeichnung $\Delta z$ angewendet wird, so dass

$$z_1 - z = \Delta z, \quad z_1 = z + \Delta z.$$

Sind also, wie in unserem Falle, $x$ und $x_1$ Werte der Independenten, $x$ endlich, so werden wir $x_1 - x = \Delta x$ das Inkrement der Independenten nennen. Sind $y$ und $y_1$ die entsprechenden Funktionswerte, $y$ endlich, so ist $y_1 - y = \Delta y$ das entsprechende Inkrement der Funktion.

Die Stetigkeit der Funktion bei irgend einem endlichen Werte $x$, dem ein endliches $y$ entspricht, kann also dahin erklärt werden, dass an der betreffenden Stelle *das Inkrement der Funktion unendlich klein werden muss mit dem der Independenten.*

Wir haben uns bisher nicht auf endliche Werte des Argumentes beschränkt. Wenn aber zum Intervall von $x$ nur endliche Zahlen und zu diesen nur endliche $y$ gehören, so kann es vorkommen, dass bei beliebiger Wahl der positiven Zahl $\varepsilon$ der absolute Betrag von $y - y_1$ stets unter $\varepsilon$ liegt, wo immer $x$ und $x_1$ im Intervall angenommen werden, sobald nur abs $(x - x_1)$ eine hinreichend kleine positive Zahl $\delta$ nicht erreicht. In diesem Falle ist $y$ nicht nur durchweg stetig zu nennen, sondern man sagt,* $y$ sei gleichmässig stetig in dem Intervall.

---

* Nach Heine, Crelles Journal Bd. 71 S. 361, Bd. 74 S 184.

*Bewegt $x$ sich zwischen endlichen Grenzen, und ist $y$ überall mit Einschluss der Grenzen stetig und endlich, so ist $y$ in dem Intervall gleichmässig stetig.*

Beweis:* Unter $x_1 x_2$ sollen Zahlen aus dem Intervall, unter $y_1 y_2$ die zugehörigen Funktionswerte verstanden werden; $\varepsilon$ sei eine beliebige positive Zahl, kleiner als die obere Grenze aller abs $(y_1 - y_2)$. Man kann zu jedem Werte von $x$ eine positive Zahl $z$ so angeben, dass abs $(y_1 - y_2) < \varepsilon$, sobald $x_1$ und $x_2$ zwischen $x - z$ und $x + z$ liegen, dass abs $(y_1 - y_2)$ nicht durchweg $< \varepsilon$, wenn $x_1$ und $x_2$ zwischen $x - \zeta$ und $x + \zeta$ liegen und $\zeta > z$ ist. Diese Zahl $z$ ist eine Funktion von $x$, hat überall endliche positive Werte und mithin eine untere Grenze $\delta$, die nicht negativ sein kann. Es sei nun $z = d$ für $x = a$; $x$ werde zwischen $a - d$ und $a + d$ angenommen, abs $(x - a) = u$ gesetzt. Liegen $x_1$ und $x_2$ zwischen $x - (d - u)$ und $x + (d - u)$, so liegen sie auch zwischen $a - d$ und $a + d$, und es ist daher abs $(y_1 - y_2) < \varepsilon$; daraus folgt:

$$z > d - u.$$

Nimmt man aber $\zeta > d + u$, so kann man zwischen $a - (\zeta - u)$ und $a + (\zeta - u)$ Werte $x_1$ und $x_2$ angeben, für welche abs $(y_1 - y_2) > \varepsilon$; da diese Werte auch zwischen $x - \zeta$ und $x + \zeta$ liegen, so ist

$$z < \zeta, \quad \text{d. i.} \quad z < d + u,$$

folglich $d - u \leq z \leq d + u$ und

$$\text{abs}\,(z - d) \leq u.$$

Für lim $x = a$ ist lim $u = 0$, folglich auch lim $(z - d) = 0$, lim $z = d$, d. h. $z$ ist stetig bei $x = a$. Demnach ist $z$ überall stetig. Daraus folgt, dass $\delta$ selbst ein Wert von $z$, mithin von Null verschieden ist. Nimmt man nun $x$ und $x_1$ im Intervall beliebig, aber abs $(x - x_1) < \delta$, so liegt $x_1$ zwischen $x - \delta$ und $x + \delta$, also zwischen $x - z$ und $x + z$, und folglich ist abs $(y - y_1) < \varepsilon$.

Der Begriff der Stetigkeit und (im allgemeinen) die vorstehenden Sätze über stetige Funktionen lassen sich auf beliebig viele Independenten ausdehnen. Ist z. B. $y$ eine Funktion von zwei Independenten $x, y$ und für die Wertepaare oder Punkte $(x, y)$ ein Continuum**

* Vergl. Lüroth, Mathem. Ann. Bd. 6 S. 319.

** Wenn die eindeutigen und endlichen Funktionen der stetigen Veränderlichen $t$:

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \chi(t)$$

stetig verlaufen von $t = t_0$ bis $t = t_1$, und es ist

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \chi(t_0) = y_0, \quad \varphi(t_1) = x_1, \quad \chi(t_1) = y_1,$$

gegeben, so sei $(a, b)$ ein Punkt des Gebietes und $c$ der zugehörige Funktionswert; $z$ heisst stetig an der Stelle $(a, b)$, wenn

$$c = \lim z \quad \text{für} \quad \lim\,(x, y) = (a, b),$$

andernfalls unstetig. — Eine wesentliche Änderung erfährt der Beweis des Satzes:

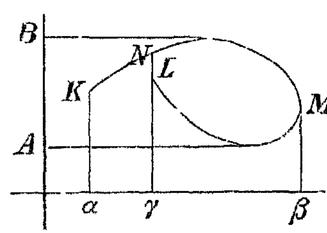
Wenn die Funktion $z$ durchweg stetig und endlich ist und die Zahl $\gamma$ liegt zwischen der unteren und der oberen Grenze aller Funktionswerte, so ist $\gamma$ selbst ein Wert der Funktion.

Beweis: Man kann eine Stelle $(x_0, y_0)$ angeben, wo $z > \gamma$ ist, und eine Stelle $(x_1, y_1)$, wo $z < \gamma$ ist. Verbindet man diese Stellen durch eine stetige, ganz in dem Kontinuum verlaufende Linie, so wird $z$ für die Punkte dieser Linie Funktion einer stetigen Variablen $t$, und zwar stetige und endliche Funktion; die daselbst auftretenden Werte von $z$ bilden demnach eine stetige Folge, und es muss $\gamma$ unter ihnen vorkommen.

## § 11. Die inverse Funktion.

Um eine ebene Linie (von der kein Teil eine konstante Abscisse hat) in rechtwinkligen Koordinaten $xy$ darzustellen, teilten wir sie in Abschnitte, innerhalb deren jede Abscisse nur einmal vorkommt; in einem solchen Abschnitte lässt sich die Ordinate als eine Funktion der Abscisse auffassen. Liegt z. B. die Linie $KL$ vor, so sind zwei Abschnitte $KM$ und $LM$ zu unterscheiden. Die Abscissen der Punkte $K, L, M$ seien $\alpha, \gamma, \beta$, $\gamma$ zugleich die Abscisse von $N$. Die Abscisse variiert von $\alpha$ bis $\beta$, aber die Abscissen von $\gamma$ bis $\beta$ ($\beta$ selbst ausgenommen) kommen je zweimal vor; demgemäss wird eine Funktion den Bogen $KM$ darstellen, eine andere den Bogen $LM$. Diese Funktionen hängen bei $x = \beta$ mit einander zusammen.

Fig. 12.




---

dann sagt man: der Punkt $(\xi, \eta)$ durchläuft eine stetige Linie von $(x_0, y_0)$ bis $(x_1, y_1)$, während $t$ von $t_0$ bis $t_1$ variiert. Das Gebiet der Punkte $(x, y)$ wird eine stetige Mannigfaltigkeit (ein Kontinuum) genannt, wenn je zwei Punkte sich durch eine stetige Linie verbinden lassen, welche mit allen ihren Punkten zu jenem Gebiete gehört.

Man ist aber übereingekommen, den einheitlichen Charakter der Linie auch in der analytischen Ausdrucksweise zu wahren. Statt von zwei Funktionen zu sprechen, deren man für die Linie $KL$ bedarf, zieht man es vor, von einer im Intervall $\gamma \ldots \beta$ zweideutigen Funktion zu sprechen und zwei Zweige dieser Funktion zu unterscheiden, entsprechend den beiden über einander verlaufenden Zweigen der Linie In diesem Sinne bedient man sich auch eines einzigen Funktionszeichens für beide Zweige und stellt für die Linie in ihrer ganzen Ausdehnung eine Gleichung auf von der Form

$$y = f(x).$$

In anderen Fällen wird man einer dreideutigen Funktion bedürfen, von drei Zweigen reden u. s. w. Wird das Wort Funktion im alten Sinne gebraucht, so ist es von jetzt ab nötig, den Zusatz „eindeutig" zu machen.

Die Ordinaten der Linie werden variieren von einem kleinsten Werte $A$ bis zu einem grössten $B$. Zwischen diesen Grenzen kann man (wenn kein Teil der Linie eine konstante Ordinate hat) die Abscisse eine Funktion der Ordinate nennen mit demselben Rechte, mit welchem wir die Ordinate eine Funktion der Abscisse nannten. Die Linie wird daher auch durch eine Gleichung von der Form

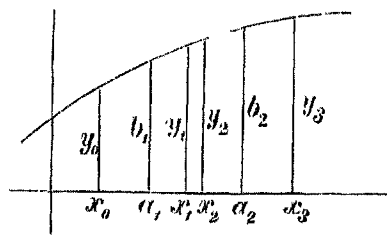
$$x = \varphi(y)$$

dargestellt. Die Funktion $\varphi(y)$ braucht selbst dann nicht eindeutig zu sein, wenn $f(x)$ eindeutig war; so z. B. würde schon der Bogen $KM$ eine zum Teil zweideutige Funktion erfordern.

Sehen wir wieder von der geometrischen Auffassung ab. Unter $y = f(x)$ werde zunächst eine *eindeutige* Funktion verstanden, *die keinen Wert mehr als einmal annimmt* (also nicht konstant ist); $x$ habe die untere Grenze $\alpha$, die obere $\beta$, $y$ die untere Grenze $A$, die obere $B$. Zu jedem dieser $y$ gehört ein $x$ und zwar nur eines; $x$ ist daher eine Funktion von $y$, etwa $x = \varphi(y)$. Das Abhängigkeitsverhältnis zwischen $x$ und $y$ ist jetzt umgekehrt, und man nennt deshalb $\varphi(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$. Die Funktion $\varphi(y)$ ist hier ebenfalls eindeutig und nimmt keinen Wert mehr als einmal an (ist also nicht konstant). Wir wollen insbesondere annehmen, dass *$x$ eine stetige Variable, $y$ eine stetige Funktion* und überdies *$y$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ endlich* ist. Die Werte von $y$ bilden dann eine stetige Folge mit den Grenzen $A$ und $B$; dabei kann es unentschieden bleiben, ob $\alpha$ und $\beta$ zum Intervall von $x$ gehören oder nicht.

*Die Funktion $y$ nimmt beständig zu oder beständig ab, während $x$ zunimmt.* Es seien nämlich $a_1$ und $a_2$ beliebige Zahlen zwischen $\alpha$ und $\beta$, $a_1 < a_2$, $x_1$ und $x_2$ zwischen $a_1$ und $a_2$, $x_1 < x_2$, $x_0$ zwischen $\alpha$ und $a_1$, $x_3$ zwischen $a_2$ und $\beta$; $b_1, b_2, y_1, y_2, y_0, y_3$ seien die zugehörigen Funktionswerte. Nehmen wir zuerst $b_1 < b_2$. Wäre $y_1 < b_1$, so könnte $y$ zwischen $x_1$ und $a_2$ nicht überall von $b_1$ verschieden sein; da aber $b_1$ sich nicht wiederholen darf, so muss $y_1 > b_1$ sein. Ebenso ergiebt sich $y_1 < b_2$, also $b_1 < y_1 < b_2$, und weiter $y_1 < y_2 < b_2$. Wäre $y_0 > b_1$, so könnte man $y$ so wählen, dass sein Wert zwischen $y_0$ und $b_1$ und zwischen $b_2$ und $b_1$ läge; ein solcher Wert müsste sowohl zwischen $x_0$ und $a_1$ als auch zwischen $a_1$ und $a_2$ vorkommen. Da dies nicht stattfinden soll, so ist $y_0 < b_1$. Ebenso findet man $b_2 < y_3$. Demnach ist $y_0 < y_3$, und wie zwischen $a_1$ und $a_2$ der kleineren Ordinate $y_1$ die grössere $y_2$ folgt, so findet dies auch zwischen $x_0$ und $x_3$ statt, d. h. in der ganzen Ausdehnung des Intervalles. In gleicher Weise wird der Fall $b_1 > b_2$ behandelt.

Fig. 13.

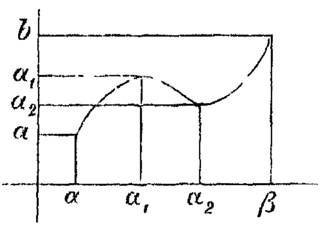



Daraus folgt, dass die inverse Funktion $\varphi(y)$ ebenfalls beständig im Zunehmen oder beständig im Abnehmen ist. Für diese Funktion ist das Intervall des Argumentes durch $A$ und $B$ begrenzt. Ob $A$ oder $B$ zu den Werten von $y$ gehört, hängt davon ab, ob $\alpha$ oder $\beta$ Werte von $x$ sind; jedenfalls aber ist $y$ eine stetige Variable und die Werte von $\varphi(y)$ bilden eine stetige Folge zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\beta$. Also ist $\varphi(y)$ überall stetig nach § 10 Seite 54.

*Die Funktion $x = \varphi(y)$ ist für alle Werte, welche $y$ annimmt, stetig und besitzt überhaupt alle Eigenschaften, welche bei der Funktion $y = f(x)$ vorausgesetzt wurden.*

Aber bei diesen Voraussetzungen können wir nicht stehen bleiben. Halten wir bei der Funktion $y = f(x)$ die *Eindeutigkeit* noch fest, so genügt, um eine im allgemeinen stetige Umkehrungsfunktion zu erhalten, die Annahme, dass *das Intervall der Variablen $x$ sich in eine endliche Anzahl von Abschnitten zerlegen lässt, innerhalb deren jene Voraussetzungen erfüllt sind.* Wenn $\alpha$ die untere, $\beta$ die obere Grenze der $x$ bedeutet, so mag der erste Abschnitt sich von $\alpha$ bis $\alpha_1$ erstrecken, der zweite von $\alpha_1$ bis $\alpha_2$ u. s. w.; die Grenzen der Funktionswerte in den einzelnen Abschnitten seien $a$ und $a'$, $a_1$ und $a''$, $a_2$ und $a'''$, ..., $a_{n-1}$ und $b$. An einer Übergangsstelle, wie $\alpha_1$, ist $y$ unstetig oder unendlich oder ein extremer Wert,* d. h. ein Maximum oder ein Minimum, und zwar ein Maximum, wenn $f(\alpha_1)$ in gewisser Nähe bei $\alpha_1$ alle anderen Funktionswerte übertrifft, dagegen ein Minimum, wenn $f(\alpha_1)$ in gewisser Nähe bei $\alpha_1$ hinter allen anderen Funktionswerten zurückbleibt.

Fig. 11




Man erhält im ersten Abschnitt eine eindeutige und stetige Umkehrung der Funktion $f(x)$ für alle $y$ zwischen $a$ und $a'$, im zweiten Abschnitt eine ebensolche Umkehrung für alle $y$ zwischen $a_1$ und $a''$ u. s. w. Aber nicht immer werden diese Funktionen sich zu einer eindeutigen Umkehrung der Funktion $f(x)$ zusammenfügen. Vielmehr wird, wenn ein Wert von $f(x)$ sich wiederholt, eine mehrdeutige Umkehrung $x = \varphi(y)$ entstehen. Gehört z. B. zu $x = \alpha_1$ ein extremer Wert von $y$, so bildet die dem ersten Abschnitt entsprechende Umkehrung einen Zweig der Funktion $\varphi(y)$, die dem zweiten Abschnitt entsprechende gehört dann zu einem zweiten Zweige. U. s. w.

## § 12. Die algebraischen Funktionen.

Die Funktionen unterscheiden sich wesentlich je nach den Operationen, durch welche sie aus den Argumenten berechnet werden. Die Rechnungen, mit denen die Zahlenlehre beginnt, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (die vier Species, die Grundoperationen, die arithmetischen Operationen), führen zu den einfachsten Funktionsarten. Schliessen wir vorerst die Division aus. Jede Operation, die nur aus Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen (in endlicher Anzahl) besteht, kann man eine ganze Operation nennen; an ganzen Zahlen vollzogen, giebt sie eine ganze Zahl als Resultat. Kann man eine Funktion aus den Argumenten und aus anderen (endlichen) Zahlen durch eine ganze Operation berechnen, so heisst sie eine ganze Funktion. Die

* Baltzer, Die Elemente der Mathematik, Bd. 1 (3. Aufl. 1872), Algebra § 2.

Argumente können jeden endlichen Wert annehmen; die Funktion selbst ist dabei endlich und eindeutig. Die in § 6 erhaltenen Funktionen

$$x = bt, \quad y = a + ct - \tfrac{1}{2} gt^2, \quad v = c - gt$$

sind ganze Funktionen von $t$. Jede ganze Funktion einer Variablen $t$ lässt sich — und zwar nur in einer Weise — auf die Form

$$a + bt + ct^2 + \ldots + kt^n$$

bringen, wo die Koefficienten $a, b, c, \ldots, k$ von $t$ nicht abhängen; $n$, der höchste vorkommende Exponent von $t$, heisst der Grad der Funktion. Die ganze Funktion ersten Grades

$$a + bt$$

nennt man auch linear. Für $a = 0$, $b = 1$ reduciert sie sich auf die Independente selbst; diese ist demnach als lineare ganze Funktion zu betrachten. Die Konstante $a$ kann man ebenfalls als ganze Funktion betrachten, und zwar vom Grade 0. Auch bei mehreren Argumenten $rs\ldots$ erscheint die ganze Funktion nach dem Ordnen als Polynom, dessen Glieder (Terme) je aus einem konstanten Faktor (dem Koefficienten) und aus positiven ganzen Potenzen der Argumente (die nullte Potenz eingeschlossen) durch Multiplikation entstehen, z. B. $-2r^3s$. Die Algebra lehrt, dass die Funktion eine Summe solcher Glieder ist und *sich nur auf eine Art in Glieder zerlegen lässt.*

Setzt man für einen Augenblick

$$a + bt + \ldots + ht^{n-1} + kt^n = u, \quad \frac{a}{t^n} + \frac{b}{t^{n-1}} + \ldots + \frac{h}{t} + k = v,$$

so ist $u = vt^n$. Für $\lim t = +\infty$ hat man:

$$\lim t^n = \lim t^{n-1} = \ldots = \lim t = +\infty,$$

$$\lim \frac{a}{t^n} = \lim \frac{b}{t^{n-1}} = \ldots = \lim \frac{h}{t} = 0,$$

folglich $\lim v = k$, $\lim u = k(+\infty)$; für $\lim t = -\infty$ hat man $\lim u = (-1)^n k (+\infty)$; endlich wird

$$\lim u = \infty \quad \text{für} \quad \lim t = \infty.$$

In Rücksicht hierauf spricht man auch von einem Werte der Funktion $u$ bei $t = \infty$, und zwar nimmt man $u = \infty$ bei $t = \infty$, insbesondere $u = k(+\infty)$ bei $t = +\infty$, $u = (-1)^n k (+\infty)$ bei $t = -\infty$.

Z. B.* wenn $m$ eine positive Zahl, $h$ eine positive ganze Zahl $> \frac{1}{m}$ bedeutet, so ist $hm - 1$ positiv, und die ganze Funktion $h^{\text{ten}}$ Grades von $x$:

$$\begin{aligned} y &= x(x+2)^h - (x+1)(x+2-m)^h \\ &= x(x^h + 2hx^{h-1} + \ldots) - (x+1)[x^h + h(2-m)x^{h-1} + \ldots] \\ &= (hm-1)x^h + \ldots \end{aligned}$$

ist $= +\infty$ für $x = +\infty$, d. h. $y$ nimmt nur noch positive Werte an, sobald $x$ eine gewisse Grösse $\varrho$ überschritten hat. Nimmt man insbesondere eine positive ganze Zahl $i > \varrho$ und $> m-2$, so ist $i+2-m$ positiv und

$$i(i+2)^h - (i+1)(i+2-m)^h > 0, \quad i > (i+1)\left(\frac{i+2-m}{i+2}\right)^h,$$

$$\frac{m-2-i}{i+2} = \frac{\binom{m-1}{i+2}}{\binom{m-1}{i+1}}, \quad i \operatorname{abs}\binom{m-1}{i+1}^h > (i+1) \operatorname{abs}\binom{m-1}{i+2}^h;$$

dabei wird vorausgesetzt, dass $m$ keine ganze Zahl ist, und dass

$$\binom{\mu}{k} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2\ldots k}.$$

In die letzte Relation darf man, wenn $n$ eine ganze Zahl $> i+1$ bedeutet, an Stelle von $i$ die Zahlen $i, i+1, i+2, \ldots, n-2$ setzen und erhält also:

$$\begin{gathered} i \operatorname{abs}\binom{m-1}{i+1}^h > (i+1) \operatorname{abs}\binom{m-1}{i+2}^h > (i+2) \operatorname{abs}\binom{m-1}{i+3}^h > \ldots \\ > (n-1) \operatorname{abs}\binom{m-1}{n}^h, \end{gathered}$$

$$\operatorname{abs}\binom{m-1}{n} < i^{\frac{1}{h}}(n-1)^{-\frac{1}{h}} \operatorname{abs}\binom{m-1}{i+1}.$$

Da nun $\lim (n-1)^{-\frac{1}{h}} = 0$ für $\lim n = +\infty$ (Seite 43), so ergiebt sich schliesslich:**

$$\lim \binom{m-1}{n} = 0 \quad \text{für} \quad \lim n = \infty, \quad \text{wenn } m \text{ positiv.}$$

Jede Operation, die nur aus Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen (in endlicher Anzahl) besteht, kann man eine r a t i o n a l e O p e r a t i o n nennen; an rationalen Zahlen voll-

---

* Siehe Gauss' Werke, Bd. 3 S. 139 f.

** Vergl. unten § 25.

zogen, liefert sie ein rationales Resultat. Kann man eine Funktion aus den Argumenten und aus anderen (endlichen) Zahlen durch eine rationale Operation berechnen, so heisst sie eine rationale Funktion. Jede ganze Funktion ist eine rationale. Jede rationale Funktion, die keine ganze ist, nennt man eine gebrochene rationale Funktion oder rationale Bruchfunktion. Man kann eine rationale Funktion stets auf die Form eines Bruches bringen, dessen Zähler und Nenner ganze Funktionen sind. Wenn der Nenner verschwindet, so kann die Funktion unendlich oder unbestimmt werden. So ist z. B. die Funktion

$$\frac{1}{t} = \infty \quad \text{für} \quad x = 0;$$

die Funktion

$$\frac{r - s}{r^2 - s}$$

wird unbestimmt bei $r = 1$, $s = 1$. Hiervon abgesehen, sind die Argumente unbeschränkt variabel, die Funktion eindeutig und endlich.

Die Argumente selbst sind stetige Funktionen, ebenso die Konstanten. Um die Stetigkeit der rationalen Funktionen allgemein zu prüfen, führen wir zwei Funktionen $y$, $z$ eines Argumentes $x$ ein und setzen voraus, dass $y = b$ und $z = c$ bei $x = a$ und überdies $y$, $z$ stetig bei $x = a$, d. h.

$$b = \lim y \quad \text{für} \quad \lim x = a, \quad c = \lim z \quad \text{für} \quad \lim x = a.$$

Dann gelten folgende Sätze, die sich auf beliebig viele Argumente ausdehnen lassen.

*Ist $b + c$ nicht unbestimmt, so ist die Funktion $y + z$ stetig bei $x = a$.* Das Entsprechende gilt von der Funktion $y - z$, sowie von der algebraischen Summe beliebig vieler Addenden.

*Ist $bc$ nicht unbestimmt, so ist die Funktion $yz$ stetig bei $x = a$.* Dasselbe gilt bei beliebig vielen Faktoren.

*Ist $\frac{b}{c}$ nicht unbestimmt, so ist die Funktion $\frac{y}{z}$ stetig bei $x = a$.*

Der erste Satz beruht darauf, dass

$$b + c = \lim y + \lim z = \lim (y + z) \quad \text{für} \quad \lim x = a$$

und zugleich $b + c$ der Wert der Funktion $y + z$ für $x = a$ ist. Analog werden die beiden anderen begründet.

Nach dem zweiten Satze ist jede positive ganze Potenz einer Independenten eine stetige Funktion, nach demselben Satze auch jedes Glied einer ganzen Funktion, endlich nach dem ersten Satze jede Summe von solchen Gliedern. *Die ganze Funktion ist allenthalben stetig;* und als Quotient zweier ganzen Funktionen ist *jede rationale Funktion überall stetig, wo sie nicht unbestimmt ist.*

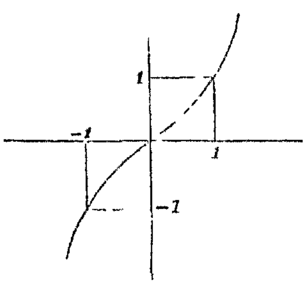
Wenn wir den Kreis der rationalen Operationen verlassen, begegnen wir zuerst der Radicierung. Die $n^{te}$ Wurzel einer Variablen ist inverse Funktion einer $n^{ten}$ Potenz. Betrachten wir die Funktion

$$y = x^n$$

der Independenten $x$; $n$ ist eine positive ganze Zahl. Die Variable $x$ ist unbeschränkt veränderlich; für alle endlichen $x$ ist $y$ eindeutig, endlich und stetig. Bei $x = \infty$ ist $y = \infty$, ohne unstetig zu werden.

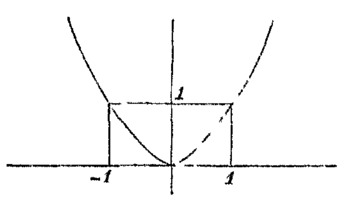
Ist $n$ ungerade, so nimmt $y = x^n$ alle Werte an. Variiert nämlich $x$ von 0 bis $+\infty$, so durchläuft auch $y$ alle Zahlen von 0 bis $+\infty$, keine wiederholt; variiert $x$ von 0 bis $-\infty$, so durchläuft auch $y$ alle Zahlen von 0 bis $-\infty$, keine wiederholt. Indem also $x$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, ist $y$ durchweg eindeutig und stetig, endlich für die endlichen $x$, und durchläuft in beständigem Zunehmen die Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Demgemäss ist auch die inverse Funktion $x = \sqrt[n]{y}$ durchweg eindeutig* und stetig, und wenn $y$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, so bewegt sich $\sqrt[n]{y}$ beständig zunehmend zwischen denselben Grenzen.

Fig. 15




Ist $n$ gerade, so nimmt $y = x^n$ nur alle positiven Werte an. Während $x$ die Reihe der positiven Zahlen durchläuft, verhält $y$ sich wie im vorigen Falle; geht man jedoch zu den negativen $x$ über, so nimmt $y$ die Werte von 0 bis $+\infty$ nochmals an. Daraus ergiebt sich für die inverse Funktion $x = \sqrt[n]{y}$ als Intervall des Argumentes nur die Reihe der positiven Zahlen. Aber zu jeder dieser Zahlen gehören zwei entgegengesetzt gleiche Werte von $x$ (zu $y = 0$ nur einer). Einen Zweig der (bei Beschränkung auf die reellen Werte) *zweideutigen* Funktion $\sqrt[n]{y}$ bilden die positiven $x$, welche von 0 bis $+\infty$ wachsend und stetig va-

Fig 16




* Komplexe Werte haben wir ausgeschlossen.

riieren, während $y$ von 0 bis $+\infty$ variiert. Den anderen Zweig bilden die negativen $x$, welche gleichzeitig die Werte von 0 bis $\infty$ abnehmend und stetig durchlaufen. Bei $y=0$ hängen beide Zweige stetig zusammen.

Nehmen wir daher wieder $x$ als Independente und betrachten die Funktion

$$y=\sqrt[n]{x} \quad (n \text{ positive ganze Zahl})$$

beziehungsweise einen Zweig dieser Funktion, so ist $y$ *durchweg stetig*, gleichviel ob $n$ gerade oder ungerade ist. Wenn $r$ von einer oder mehreren Independenten abhängt und bei irgend welchen Werten stetig ist, so ist $\sqrt[n]{r}$ bei denselben Werten stetig. Überhaupt *wenn man stetige Funktionen durch Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Radicierungen (in endlicher Anzahl) mit einander verbindet, so ergiebt sich eine stetige Funktion.* Vorausgesetzt wird dabei, dass jene Rechnungen an der betreffenden Stelle zu einem bestimmten Werte führen.

Die Funktion $y=\sqrt[n]{x}$ ist durch eine Gleichung $y^n-x=0$ definiert, deren linke Seite eine ganze Funktion der beiden Variablen ist. Eine Gleichung, deren beide Seiten ganze Funktionen gewisser Grössen sind, wird eine algebraische Gleichung zwischen diesen Grössen genannt. Auf eine solche Gleichung lässt sich jede zurückführen, in welcher nicht bloss Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, sondern auch Divisionen und Radicierungen vorkommen, da man die Nenner und Wurzeln beseitigen kann. Jede Gleichung, die nicht algebraisch ist, heisst eine transcendente Gleichung.

Ist nun eine Funktion $y$ von beliebig vielen Argumenten mit diesen durch eine algebraische Gleichung verknüpft, so heisst sie eine algebraische Funktion, in allen anderen Fällen heisst sie eine transcendente Funktion. Demnach ist jeder Ausdruck, den man aus den Argumenten und aus anderen Grössen bloss durch Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Radicierungen (in endlicher Anzahl) berechnen kann, eine algebraische Funktion und wird, weil durch gebräuchliche Zeichen darstellbar, eine explicite oder entwickelte (entwickelbare) algebraische Funktion genannt; den Gegensatz bilden die impliciten oder unentwickelten (unentwickelbaren) algebraischen Funktionen.

Jede rationale Funktion ist eine algebraische und zwar eine entwickelte. Die algebraischen Funktionen, die nicht rational sind, heissen irrationale algebraische Funktionen.

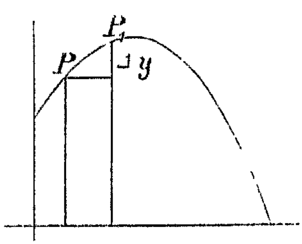
In einer entwickelten algebraischen Funktion kann Division vorkommen. Eine solche kann daher stellenweise unendlich werden, auch unbestimmt; und abgesehen davon kann das Gebiet der Argumente noch anderweitig beschränkt sein, wie wir dies bei der Funktion $\sqrt[n]{x}$ für gerades $n$ gesehen haben. Aber *eine entwickelte algebraische Funktion ist überall stetig, wo sie einen bestimmten Wert besitzt.*

Die Algebra lehrt, dass *jede algebraische Funktion von einer oder mehreren algebraischen Funktionen wieder eine algebraische Funktion ist*, und dass *jede Gleichung, deren beide Seiten algebraische Funktionen sind, sich auf eine algebraische Gleichung zurückführen lässt.*

## § 13. Differentiale.

Die Berechnung der Geschwindigkeit, mit der eine Bewegung sich vollzieht, ist eine der Aufgaben, welche zur Erfindung der Differentialrechnung hingeführt haben. Für eine gewisse Bewegung, deren Bedingungen in § 6 entwickelt worden sind, haben wir in § 8 die Geschwindigkeit aus den Gleichungen, welche die Ortsveränderung darstellen, hergeleitet. Dabei bedeutete $t$ die seit dem Beginn der Bewegung verflossene Zeit, $y$ die Erhebung des bewegten Körpers über der Erdoberfläche (positiv); es waren $a$, $c$, $g$ Konstanten und

Fig. 17.




$$y = a + ct - \tfrac{1}{2} gt^2,$$

also $y$ eine ganze Funktion zweiten Grades von $t$. Ist $P$ der Ort des Körpers zur Zeit $t$, $P_1$ ein anderer Ort, so verfliesst, während die Bahnstrecke $PP_1$ zurückgelegt wird, eine gewisse Zeit $\varDelta t$ und erfolgt ein Fortschreiten in vertikaler Richtung um eine gewisse Strecke $\varDelta y$. Das Verhältnis der korrespondierenden Incremente (Differenzen) beider Variablen liess sich auf die Form

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta t} = v + \eta$$

bringen, wo

$$v = c - gt, \quad \eta = -\tfrac{1}{2} g \varDelta t.$$

Nun wurde in Betracht gezogen, dass es sich bei Berechnung des obigen Verhältnisses nur um eine gewisse, jedesmal zu bezeichnende

Genauigkeit handelt. War der absolute Betrag der (von Null verschiedenen) Grösse $\varDelta t$ und demgemäss auch die Bahnstrecke $PP_1$ hinreichend klein gewählt, dann war

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta t} = v \text{ mit erlaubtem Fehler}$$

und innerhalb der Strecke $PP_1$ das Verhältnis des Weges (in vertikaler Richtung) zur Zeit annähernd überall dasselbe. Den so zwischen Grenzen eingeschlossenen Wert von $\varDelta t$ nannten wir unendlich klein; während die unendlich kleine Zeit $\varDelta t$ verfliesst, vereinfacht sich die Bewegung annähernd zu einer gleichförmigen und geht mit der Geschwindigkeit $v$ vor sich.

Eine unendlich kleine Zeitdifferenz, ein unendlich kleines Increment der Independenten $t$, wird ein Zeitdifferential, Differential der Variablen $t$ genannt und mit $dt$ bezeichnet. Wenn die Independente vom Werte $t$ zu dem unendlich nahen Werte $t+dt$ übergeht, so erfährt die Funktion $y$ den Zuwachs

$$(v+\eta)\,dt = v\,dt + \eta\,dt.$$

Das Glied $v\,dt$ ist dem Differential der Zeit proportional, in dem anderen Gliede ist $\eta = -\frac{1}{2}g\,dt$ nicht unabhängig von $dt$. Allein insofern es sich nur um das Verhältnis der Incremente und bei diesem nur um eine gewisse Genauigkeit handelt, stellt schon das Glied $v\,dt$ das Inkrement von $y$ mit hinreichender Genauigkeit dar. Dieser Teil des dem $dt$ entsprechenden Incrementes von $y$ wird das Differential der Funktion $y$ (das vertikale Wegdifferential) in Bezug auf $t$ genannt und mit $dy$ bezeichnet, so dass

$$dy = v\,dt$$

in einfachster Weise von $dt$ abhängig. Wegen dieser Gleichung und weil

$$v = \frac{dy}{dt},$$

heisst $v$ der Differentialkoefficient oder Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $t$. Da

$$v = \lim \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \quad \text{für} \quad \lim \varDelta t = 0,$$

so ist der Differentialquotient als Grenzwert des Differenzquotienten für $\lim \varDelta t = 0$ zu definieren, und es liegt also der ganzen Betrachtung die Voraussetzung zu Grunde, dass ein solcher Grenzwert existiert.

Um nun die allgemeinen Erklärungen zu geben, bezeichnen wir mit

$$y = f(x)$$

eine eindeutige Funktion der *stetigen* Variablen $x$ und fassen einen *endlichen Wert von* $x$ ins Auge, dem ein *endlicher Funktionswert* entspricht. Beim Übergange zu einem anderen endlichen Werte $x_1$, dem der Funktionswert $y_1$ entspricht, erfahren $x$ und $y$ Incremente, die wir mit $\Delta x$ resp. $\Delta y$ bezeichnen werden, kürzer auch mit $h$ resp. $k$, so dass

$$h = \Delta x = x_1 - x, \quad x_1 = x + h = x + \Delta x,$$
$$k = \Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) \text{ u. s. w.}$$

Der Quotient der Incremente

$$\frac{k}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ist im allgemeinen von der endlichen Variablen $h = \Delta x$ abhängig, deren absoluter Betrag beliebig klein werden kann, wenn auch nicht Null. *Man hat aber bemerkt, dass bei denjenigen Funktionen, denen man weitaus am meisten begegnet, und von denen der Funktionsbegriff ursprünglich entnommen ist, der Differenzquotient einem Grenzwerte zustrebt, wenn $h$ sich dem Grenzwerte Null nähert.* Ein solches Verhalten setzen wir bei der Funktion $y$ an der festgehaltenen Stelle $x$ voraus und bezeichnen den Grenzwert des Differenzquotienten mit $y'$:

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für} \quad \lim h = 0.$$

Bleiben $x$ und $x_1$ hinreichend nahe bei einander, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \text{ mit beliebig kleinem Fehler.}$$

Die Differenz $\Delta x$ ist dann unendlich klein in Rücksicht auf die vorgeschriebene Fehlergrenze; sie wird ein Differential der Variablen $x$ genannt und mit $dx$ bezeichnet (Leibnitz). Das entsprechende Increment von $y$ wird hinreichend genau durch das Produkt $y'dx$ dargestellt; man nennt dieses Produkt das Differential der Funktion $y$ in Bezug auf $x$ und bezeichnet es mit $dy$ oder $df(x)$ oder auch wohl mit $df$. Danach ist $dy$ proportional $dx$:

$$dy = y'dx, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx},$$

und man nennt $y'$ den Differentialkoefficienten oder Differentialquotienten von $y$ in Bezug auf $x$ für den betreffenden

Wert der Independenten (die Fluxion bei Newton). Eine Funktion differentiieren heisst: ihr Differential oder ihren Differentialquotienten bilden. Die Differentialrechnung hat die Anweisungen zu liefern, welche beim Differentiieren gebraucht werden.

Die Funktion $y$ des Argumentes $t$, welche uns als Beispiel gedient hat, war eine ganze Funktion zweiten Grades. Nehmen wir nun

$$y = a + bx$$

als ganze Funktion höchstens ersten Grades vom Argumente $x$, so kommt:

$$y_1 = a + bx_1, \quad y_1 - y = b(x_1 - x), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = b,$$

d. h. der Differenzquotient ist weder von $x$ noch von $\Delta x$ abhängig. Da folglich auch

$$b = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{für} \quad \lim \Delta x = 0, \quad \text{d. h.} \quad b = \frac{dy}{dx},$$

so hat $y$ für alle endlichen $x$ einen Differentialquotienten, der überall denselben Wert behält. Weiterhin wird sich ergeben, dass bei keiner anderen Funktion ein Differentialquotient vorkommt, der von $x$ nicht abhängt. Für jetzt sei nur auf zwei besondere Fälle der obigen Funktion hingewiesen. Die Funktion reduciert sich auf eine Konstante:

$$y = a,$$

wenn $b$ verschwindet; dann ist

$$\Delta y = 0, \quad dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

und man sagt daher: *Das Differential (und der Differentialquotient) einer Konstanten ist Null.* Die Funktion wird der Independenten gleich:

$$y = x,$$

wenn man $a = 0$, $b = 1$ annimmt; da alsdann

$$\Delta y = \Delta x, \quad \frac{dy}{dx} = 1,$$

so sagt man: *Der Differentialquotient der Independenten ist Eins.*

Wie der Differentialquotient einer Funktion die Geschwindigkeit der Bewegung angiebt, wenn die Funktion den zurückgelegten Weg durch die Zeit darstellt, so gewährt der Differentialquotient überhaupt Aufschlüsse über das Verhalten der Funktion. *Wo $y'$ einen endlichen Wert hat, ist $y$ stetig* (folglich $y$ endlich in gewisser Nähe der Stelle). Denn für $\lim \Delta x = 0$ ist

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \lim \Delta x = 0,$$

folglich

$$\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = y' . 0, \quad \text{d. i.} \quad \lim \Delta y = 0.$$

Im Falle der Diskontinuität ist daher $y' = \infty$;* aber es kann $y' = \infty$ werden, ohne dass $y$ unstetig wird.

Wenn $y'$ einen endlichen Wert hat, so kann man sich den Sinn der Differentiale auf folgende Weise veranschaulichen. Es sei $\delta$ ein positiver echter Bruch, und es werde $x_1$ auf die Werte zwischen $x - \delta$ und $x + \delta$ beschränkt, so dass abs $\Delta x < \delta$. Ist die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig klein gegeben, so wird für hinreichend kleine Werte von $\delta$:

$$\text{abs} \frac{\Delta y - y' \Delta x}{\delta} < \text{abs} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'\right) < \varepsilon,$$

also ist

$$0 = \lim \left(\frac{\Delta y}{\delta} - y' \frac{\Delta x}{\delta}\right) \quad \text{für} \quad \lim \delta = 0.$$

Hat man $\delta$ bei gegebenem $\varepsilon$ hinreichend klein gewählt, so bezeichnen wir die Werte von $\Delta x$ mit $dx$ und das Produkt $y'dx$ mit $dy$; es wird

$$\frac{\Delta y}{\delta} = y' \frac{dx}{\delta} = \frac{dy}{\delta} \text{ mit einem Fehler } < \varepsilon,$$

d. h. wenn man in gewisser Umgebung der betrachteten Stelle die Veränderungen von $x$ und $y$ im Verhältnis von $\delta : 1$ vergrössert, so wird das Increment der Funktion durch ihr Differential mit beliebiger Genauigkeit dargestellt; die ebene Linie, welche in rechtwinkligen Koordinaten der Gleichung $y = f(x)$ entspricht, weicht für ein gewisses Intervall auch im vergrösserten Maassstabe beliebig wenig von der Geraden ab, welche die Gleichung

$$\Delta y = y' \Delta x \quad \text{oder} \quad y_1 - y = y'(x_1 - x)$$

mit den laufenden Koordinaten $x_1 y_1$ besitzt.

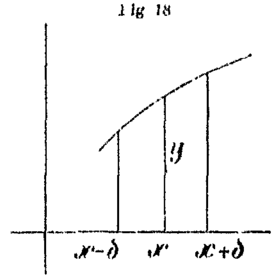
*Wo $y'$ weder 0 noch $\infty$ ist, sondern einen positiven Wert hat, ist $y$ im Zunehmen*, d. h. man kann die positive Zahl $\delta$ so an-

---

* Wenn $y'$ existiert; dies ist aber für den gegenwärtigen Paragraphen vorausgesetzt worden (Seite 70).

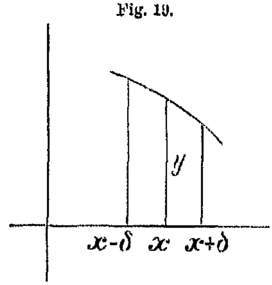
geben, dass alle Funktionswerte zwischen $x$ und $x - \delta$ kleiner als $y$, alle zwischen $x$ und $x + \delta$ grösser als $y$ sind. Nimmt man in der That $\delta$ so, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen $y' - y'$ und $y' + y'$, also positiv bleibt, so lange $\Delta x$ zwischen $-\delta$ und $+\delta$ variiert, so hat $\Delta y$ für diese $\Delta x$ das Zeichen von $\Delta x$; daher ist $y + \Delta y < y$ für die $\Delta x$ zwischen 0 und $-\delta$, dagegen $y + \Delta y > y$ für die $\Delta x$ zwischen 0 und $+\delta$.

Fig. 18.




*Wo $y'$ weder 0 noch $\infty$ ist, sondern einen negativen Wert hat, ist $y$ im Abnehmen,* d. h. man kann die positive Zahl $\delta$ so angeben, dass alle Funktionswerte zwischen $x$ und $x - \delta$ grösser als $y$, alle zwischen $x$ und $x + \delta$ kleiner als $y$ sind. Man kann nämlich $\delta$ so wählen, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ negativ ist, so lange $\Delta x$ zwischen $-\delta$ und $+\delta$ bleibt; für diese $\Delta x$ hat $\Delta y$ das entgegengesetzte Zeichen von $\Delta x$, und es ist daher $y + \Delta y$ für die zwischen 0 und $-\delta$ gelegenen $\Delta x$ grösser als $y$, für die zwischen 0 und $+\delta$ gelegenen $\Delta x$ kleiner als $y$.

Fig. 19.




Indess darf man nicht umgekehrt aus dem Verschwinden oder Unendlichwerden des Differentialquotienten schliessen, dass die Funktion an der betreffenden Stelle weder im Zunehmen noch im Abnehmen begriffen sei. Aber *wo $y$ einen extremen Wert erreicht* (überhaupt wo $y$ weder im Zunehmen noch im Abnehmen ist), *muss $y' = 0$ oder $\infty$ werden.* Wenn wir die posi-

Fig. 20.

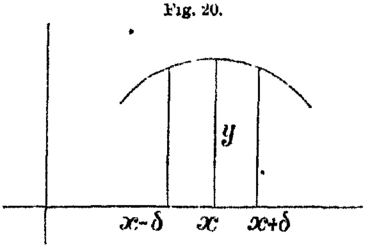
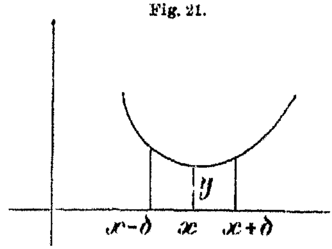



Fig. 21.




tive Zahl $\delta$ hinreichend klein annehmen, so kommen zwischen $x - \delta$ und $x + \delta$ im Falle des Maximums keine Funktionswerte vor, die grösser als $y$ sind, im Falle des Minimums keine, die kleiner als $y$ sind.

Der Entstehungsweise zufolge scheint es, als sei bei der Gleichung

$$dy = y' dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

immer daran festzuhalten, dass $x$ die unabhängige Variable bedeutet. Das ist jedoch nicht der Fall. *Wenn in gewisser Umgebung der betrachteten Stelle eine eindeutige Umkehrungsfunktion $x = \varphi(y)$ mit stetiger Variablen $y$ existiert und $\varphi(y)$ an der betreffenden Stelle stetig ist, so hat auch $\varphi(y)$ daselbst einen Differentialquotienten in Bezug auf $y$, der durch den reciproken Wert von $y'$ dargestellt wird.** Wählt man nämlich die positive Zahl $\delta$ hinreichend klein und nimmt $\Delta x$ (von Null verschieden) zwischen $-\delta$ und $+\delta$, so bleibt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in einer gewissen, übrigens beliebigen Nähe bei $y'$. Um nun zu bewirken, dass $\Delta x$ zwischen $-\delta$ und $+\delta$ bleibt,** braucht man nur $\Delta y$ hinreichend nahe bei der Null zu halten. Für unendlich kleine $\Delta y$ ist demnach $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ unendlich wenig von $y'$ verschieden; also auch für $\lim \Delta y = 0$ ist

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{1}{y'} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

d. h. der reciproke Wert von $y'$ ist der Differentialquotient von $x$ in Bezug auf $y$, oder es ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

auch in dem Sinne, dass $y$ die unabhängige, $x$ eine von $y$ abhängige Variable ist.

Wird an Stelle von $x$ eine Funktion $g(u)$ der stetigen Variablen $u$ gesetzt, so wird durch die Beziehungen

$$y = f(x), \quad x = g(u)$$

$y$ mittelbare Funktion von $u$:

$$y = f[g(u)].$$

---

* In Betreff dieses und der beiden folgenden Sätze vergl. noch das Ende des § 15.

** Dass bei jeder Verkleinerung von abs $\Delta y$ die Null zu den Werten von $\Delta x$ gehört, dass also in jeder Nähe des betrachteten Wertes von $y$ der entsprechende Wert von $\varphi(y)$ wiederkehrt, ist durch die Eindeutigkeit von $f(x)$ ausgeschlossen.

Entspricht der betrachtete Wert von $x$ einem endlichen Werte von $u$, so kann man fragen, ob $y$ sich auch in Bezug auf $u$ differentiieren lässt. *Wenn nun $g(u)$ bei diesem Werte von $u$ stetig ist und einen Differentialquotienten $x'$ besitzt, der mit $y'$ ein bestimmtes Produkt liefert, wenn ferner der entsprechende Wert von $g(u)$ nicht in jeder Nähe des betrachteten Wertes von $u$ wiederkehrt, so existiert daselbst ein Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $u$, der durch Multiplikation der beiden Differentialquotienten $y'$ und $x'$ erhalten wird.* Denn, ähnlich wie im vorigen Beweise, ist nicht nur für $\lim \varDelta x = 0$, sondern auch für $\lim \varDelta u = 0$:

$$y' = \lim \frac{\varDelta y}{\varDelta x},$$

wobei $\varDelta x$ nur von Null verschiedene Werte annimmt. Für $\lim \varDelta u = 0$ ist ferner

$$x' = \lim \frac{\varDelta x}{\varDelta u}.$$

Daraus folgt aber:

$$y'.x' = \lim \frac{\varDelta y}{\varDelta u} \quad \text{für} \quad \lim \varDelta u = 0,$$

d. h. das Produkt $y'x'$ ist der Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $u$, oder es ist

$$\frac{dy}{du} = y'x' = y'\frac{dx}{du}, \quad dy = y'dx$$

auch in dem Sinne, dass $x$ die Funktion $g(u)$, $dx$ ihr Differential in Bezug auf $u$ bedeutet, dass also

$$dx = x'du.$$

Um unter den vorstehenden Bedingungen das Differential von $y$ nach $u$ zu bilden, bildet man das Differential von $y$ nach $x$, als wäre $x$ Independente, versteht aber in der Formel $dy = y'dx$ unter $dx$ das Differential der vermittelnden Funktion in Bezug auf $u$, d. i. $x'du$; will man den Differentialquotienten von $y$ nach $u$, so bildet man den Differentialquotienten von $y$ nach $x$, als wäre $x$ Independente, und multipliciert ihn mit dem Differentialquotienten von $x$ nach $u$. In diesem Sinne gilt die Formel

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du},$$

welche eine sogenannte mittelbare Differentiation darstellt. Das Einsetzen einer Funktion $g(u)$ für $x$ in den Ausdruck $y = f(x)$ wird unter Umständen eine Substitution genannt, durch welche

die Variable $x$ entfernt und die „neue Variable" $u$ eingeführt wird. Durch die Substitution
$$x = g(u)$$
wird $y$ in eine Funktion von $u$ transformiert. Dabei bleibt unter den angegebenen Voraussetzungen die Differentiierbarkeit erhalten, und die obige Formel lehrt, wie sich der Differentialquotient der transformierten Funktion auf den der ursprünglichen Funktion zurückführt.

Endlich kommt noch der Fall in Betracht, wo $x$ und $y$ als eindeutige Funktionen einer stetigen Variablen $t$ gegeben sind, etwa
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$
Während $t$ sein Intervall durchläuft, kann man zu jedem Werte den Punkt $(x, y)$ in Bezug auf ein in der Ebene angenommenes System rechtwinkliger Koordinaten konstruieren. Dadurch entsteht eine ebene Linie, und für diese kann man $y$ als Funktion von $x$, oder $x$ als Funktion von $y$ ausdrücken. Man wird demgemäss erwarten, dass die obigen Gleichungen ein Abhängigkeitsverhältnis zwischen $x$ und $y$ hervorbringen. Wenn in der That $x = \varphi(t)$ in einem gewissen Intervall eine eindeutige Umkehrungsfunktion $t = g(x)$ mit stetiger Variablen $x$ zulässt, so wird
$$y = \psi(t) = \psi[g(x)]$$
eine Funktion von $x$, die wieder mit $f(x)$ bezeichnet werden mag. Bei einem endlichen Werte von $t$, dem endliche Werte von $x$ und $y$ entsprechen, kann man also fragen, ob $y$ sich nach $x$ differentiieren lässt. *Wenn nun $x$ und $y$ bei diesem Werte von $t$ Differentialquotienten $\xi$ und $\eta$ in Bezug auf $t$ besitzen, die einen bestimmten Quotienten liefern, und $g(x)$ bei dem entsprechenden Werte von $x$ stetig ist, so existiert daselbst ein Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $x$, und man erhält ihn, indem man $\eta$ durch $\xi$ dividiert.* Zunächst ist nach dem vorletzten Satze der reciproke Wert von $\xi$ der Differentialquotient von $t$ in Bezug auf $x$. Infolge der Eindeutigkeit von $\varphi(t)$ treffen aber auch alle Voraussetzungen des letzten Satzes zu. Multipliciert man also
$$\eta \text{ mit } \frac{1}{\xi},$$
so erhält man den Differentialquotienten von $y$ in Bezug auf $x$, den wir wieder $y'$ nennen wollen:
$$y' = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

wo bei den Differentiationen im Zähler und im Nenner $t$ als Independente behandelt wird. Demnach ist

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

auch dann, wenn $y$ und $x$ die Funktionen $\psi(t)$ und $\varphi(t)$, $dy$ und $dx$ ihre Differentiale in Bezug auf $t$ bedeuten, wenn also

$$dy = \eta\, dt, \quad dx = \xi\, dt.$$

## § 14. Differentiation der entwickelten algebraischen Funktionen.

Wir haben gesehen, dass sich der Differentialquotient einer Konstanten auf Null, der der Independenten auf Eins reduciert. Ausser diesen Bemerkungen bedürfen wir jetzt einiger Sätze, die sich auf zwei eindeutige Funktionen $u$, $v$ einer stetigen Variablen $x$ beziehen. Es wird ein bestimmter endlicher Wert von $x$ aufgefasst, dem endliche Werte beider Funktionen entsprechen, und vorausgesetzt, dass die letzteren daselbst Differentialquotienten nach $x$ besitzen, welche $u'$ resp. $v'$ heissen mögen. Wenn man zu einem andern Werte $x_1$ der Independenten übergeht, so nehmen die Funktionen gewisse Werte $u_1$ resp. $v_1$ an; setzt man

$$x_1 - x = \Delta x, \quad u_1 - u = \Delta u, \quad v_1 - v = \Delta v,$$

so ist für $\lim \Delta x = 0$:

$$u' = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad v' = \lim \frac{\Delta v}{\Delta x}; \quad du = u'\, dx, \quad dv = v'\, dx.$$

*Wenn $u' + v'$ einen bestimmten Wert hat, so besitzt auch die Funktion $u + v$ an der betrachteten Stelle einen Differentialquotienten nach $x$ und zwar ist*

$$\frac{d(u+v)}{dx} = u' + v', \quad d(u+v) = du + dv,$$

*d. h. das Differential der Summe gleich der Summe der Differentiale.* Denn man hat:

$$\Delta(u+v) = (u_1 + v_1) - (u + v) = \Delta u + \Delta v, \quad \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

folglich:

$$u' + v' = \lim \frac{\Delta(u+x)}{\Delta x} \quad \text{für} \quad \lim \Delta x = 0.$$

Dieser Satz lässt sich auf die Differenz $u - v$ und auf Summen von beliebig vielen Gliedern übertragen. Wenn $v$ sich auf eine Konstante $a$ reduciert, so wird $v' = 0$ und

$$d(u+a) = du,$$

d. h.: *Wenn zu einer Funktion eine Konstante addiert wird, so ändert sich ihr Differentialquotient nicht,* oder: Funktionen, die nur um eine Konstante differieren, haben denselben Differentialquotienten.

*Wenn an der betrachteten Stelle $vu' + uv'$ einen bestimmten Wert hat und von den Funktionen $u$, $v$ höchstens eine unstetig ist, so besitzt auch die Funktion $uv$ dort einen Differentialquotienten nach $x$ und zwar ist*

$$\frac{d(uv)}{dx} = vu' + uv', \quad d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Nehmen wir an, $u$ sei stetig. Aus

$$\Delta(uv) = u_1 v_1 - uv = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + (u + \Delta u)v$$

ergiebt sich:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + (u + \Delta u)\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

und daraus:

$$vu' + uv' = \lim \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} \quad \text{für} \quad \lim \Delta x = 0.$$

Wird $v$ konstant angenommen, etwa $= a$, so kommt:

$$d(au) = a\,du, \quad \text{ebenso} \quad d\frac{u}{a} = \frac{du}{a},$$

d. h.: *Tritt zu einer Funktion ein konstanter Faktor oder Divisor, so tritt derselbe auch zum Differentialquotienten.* Insbesondere ist

$$d(-u) = -du.$$

Führen wir noch eine Funktion $w$ ein, so ist bei entsprechender Erweiterung unserer Voraussetzungen:

$$d(uvw) = w(v\,du + u\,dv) + uv\,.\,dw = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$$

u. s. w. Daher lautet die allgemeine Regel für die Differentiation eines Produktes, in welchem höchstens ein Faktor unstetig ist: *Man differentiiert je einen Faktor, ohne die übrigen zu ändern, und addiert die entstehenden Produkte.* Die Regel lässt sich auch folgendermassen darstellen:

$$\frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}, \quad \frac{d(uvw)}{uvw} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}, \quad \text{u. s. w.}$$

Hat man nun $n$ gleiche Faktoren $u$, also das Produkt $u^n$, so erhält man $n$ gleiche Addenden, also

$$\frac{d(u^n)}{u^n} = n\frac{du}{u}, \quad d(u^n) = nu^{n-1}du = nu^{n-1}u'\,dx,$$

vorausgesetzt, dass $u$ stetig und $uu'$ bestimmt ist. Für $u = x$ wird $u' = 1$; also ist

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

für jede positive ganze Zahl $n$ (auch für $n = 0$).

*Wenn an der betrachteten Stelle $vu' - uv'$ einen bestimmten Wert besitzt und $v$ weder verschwindet noch unstetig wird, so besitzt auch die Funktion $\frac{u}{v}$ dort einen Differentialquotienten nach $x$ und zwar ist*

$$\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{u'}{v} - u\frac{v'}{v^2},$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{du}{v} - u\frac{dv}{v^2},$$

d. h.: Um einen Bruch zu differentiieren, bildet man das Produkt des Nenners in das Differential (bezw. den Differentialquotienten) des Zählers, subtrahiert davon das Produkt des Zählers in das Differential (bezw. den Differentialquotienten) des Nenners und dividiert den Rest durch das Quadrat des Nenners. In der That ist

$$\varDelta\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \varDelta u) - u(v + \varDelta v)}{v(v + \varDelta v)} = \frac{v\varDelta u - u\varDelta v}{v(v + \varDelta v)},$$

$$\frac{\varDelta\frac{u}{v}}{\varDelta x} = \frac{v\frac{\varDelta u}{\varDelta x} - u\frac{\varDelta v}{\varDelta x}}{v(v + \varDelta v)},$$

$$vu' - uv' = \lim\left(v\frac{\varDelta u}{\varDelta x} - u\frac{\varDelta v}{\varDelta x}\right), \quad v^2 = \lim\,[v(v + \varDelta v)] \text{ für } \lim \varDelta x = 0$$

wegen der Kontinuität von $v$, folglich

$$\frac{vu' - uv'}{v^2} = \lim\frac{\varDelta\frac{u}{v}}{\varDelta x} \text{ für } \lim \varDelta x = 0.$$

Für $u = 1$ ist $u' = 0$, mithin

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{v'}{v^2}, \quad d\frac{1}{v} = -\frac{dv}{v^2}.$$

Wird hier $v = u^p$, wo $p$ eine positive ganze Zahl bedeutet, also $dv = pu^{p-1}du$, so kommt:

$$d(u^{-p}) = -\frac{pu^{p-1}du}{u^{2p}} = -pu^{-p-1}u'dx,$$

vorausgesetzt, dass $u$ weder verschwindet noch unstetig wird. Demnach ist für jede ganze Zahl $q$:

$$d(u^q) = q u^{q-1} u' dx, \quad d(x^q) = q x^{q-1} dx.$$

Die Funktion $y = x^p$ ($p$ ganz und $> 1$) hat den Differentialquotienten $p x^{p-1}$. Die inverse Funktion $x = \sqrt[p]{y}$ ist überall stetig und für alle endlichen $y$ endlich, folglich ist sie nach $y$ differentiierbar und ihr Differentialquotient der reciproke des vorigen:

$$\frac{1}{p} x^{1-p} = \frac{1}{p} \frac{\sqrt[p]{y}}{y}.$$

Führt man in der inversen Funktion wieder $x$ als Independente ein, so erhält man:

$$\frac{d\sqrt[p]{x}}{dx} = \frac{1}{p} \frac{\sqrt[p]{x}}{x} = \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1},$$

und wenn $u$ eine Funktion von $x$ bedeutet, die für den betrachteten endlichen Wert von $x$ endlich und stetig ist, den entsprechenden Wert nicht in beliebiger Nähe wieder annimmt, überdies einen nicht mit $u$ zugleich verschwindenden Differentialquotienten $u'$ besitzt:

$$d\sqrt[p]{u} = \frac{1}{p} u^{\frac{1}{p}-1} u' dx.$$

Diese Formel liefert das Differential von $x^n$ für jeden rationalen Wert von $n$. Wir setzen

$$n = \frac{q}{p},$$

wo $q$ eine ganze, $p$ eine positive ganze Zahl ($> 1$). Für $u = x^q$ liefert jene Formel:

$$d\sqrt[p]{x^q} = d(x^n) = \frac{1}{p} \frac{\sqrt[p]{x^q}}{x^q} \cdot q x^{q-1} dx = \frac{q}{p} \frac{\sqrt[p]{x^q}}{x} dx,$$

wobei für negative $n$ der Wert $x = 0$ auszuschliessen ist, und man hat *für alle rationalen Exponenten*:

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx,$$

d. h. um eine Potenz von $x$ mit rationalem Exponenten nach $x$ zu differentiieren, erniedrigt man ihren Exponenten um Eins und fügt ihr dann den Exponenten als Faktor hinzu.

Die vorstehenden Regeln reichen aus, um alle entwickelten algebraischen Funktionen zu differentiieren. Liegt zunächst eine ganze Funktion vor:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n,$$

so hat man:

$$da = 0, \quad d(bx) = b\,dx, \quad d(cx^2) = 2cx\,dx, \ \ldots, \ d(kx^n) = n\,kx^{n-1}dx,$$

und $dy$ ist die Summe dieser Differentiale, also

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + \ldots + n\,kx^{n-1}.$$

Der Differentialquotient nach $x$ existiert daher für alle endlichen $x$; er wird durch eine ganze Funktion des nächst niederen Grades dargestellt und ist endlich mit $x$. Liegt eine rationale Funktion vor:

$$y = \frac{u}{v},$$

wo $u$ und $v$ ganze Funktionen von $x$ sind, so ist $y$ nach $x$ differentiierbar für alle endlichen $x$, für die $v$ nicht verschwindet, und zwar ist der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

eine rationale Funktion, welche für dieselben $x$ endlich ist; ist $\frac{u}{v}$ eine gebrochene Funktion, so ist auch der Differentialquotient eine gebrochene Funktion. Treten endlich in einer Funktion von $x$ noch Wurzeln auf, so kann man jeden Funktionszweig nach $x$ differentiieren überall, wo ein bestimmter endlicher Funktionswert existiert;* der Differentialquotient ist wieder eine entwickelte algebraische Funktion von $x$ (endlich, wo kein Radikand Null und kein Nenner Null) und zwar irrational, wenn die differentiierte Funktion irrational war.**

## § 15. Die derivierte Funktion.

Die ganzen Funktionen einer Variablen $x$ sind, wie wir gesehen haben, nach $x$ differentiierbar für alle endlichen $x$, die entwickelten algebraischen Funktionen für alle endlichen $x$, denen bestimmte endliche Funktionswerte entsprechen. Nehmen wir über-

* Die Möglichkeit, dass in beliebiger Nähe einer Stelle der Funktionswert sich wiederholt (also unendlich oft vorkommt), ist bei den algebraischen Funktionen ausgeschlossen. Denn ist $y$ eine algebraische Funktion von $x$, so ist auch $x$ eine algebraische Funktion von $y$; zu jedem Werte von $y$ gehört also nur eine endliche Anzahl Werte von $x$.

** Vergl. Stickelberger, Crelles Journal Bd. 82 S. 45.

haupt an, dass in einem Intervall endlicher Werte von $x$ eine eindeutige Funktion $y = f(x)$ vorliegt, die durchweg endlich und nach $x$ differentiierbar ist, und nennen wir $y'$ den jedesmaligen Differentialquotienten. Dann stellt $y'$ in demselben Intervall eine Funktion von $x$ dar, die man nach Lagrange (Théorie des fonctions analytiques 1797) mit

$$y' = f'(x)$$

bezeichnet und die derivierte (abgeleitete) Funktion oder die Derivierte (Ableitung) von $y$ in Bezug auf $x$ nennt.

Eine entwickelte algebraische Funktion von $x$ besitzt also stets eine Ableitung in jedem Intervall, wo die Funktion bestimmte endliche Werte hat. Die Ableitung ist wieder eine entwickelte algebraische Funktion von $x$. Die Ableitung einer irrationalen Funktion ist eine irrationale Funktion, die Ableitung einer gebrochenen rationalen Funktion ist rational und gebrochen, die Ableitung einer ganzen Funktion ist ganz.

Die Ableitung der linearen ganzen Funktion

$$a + bx$$

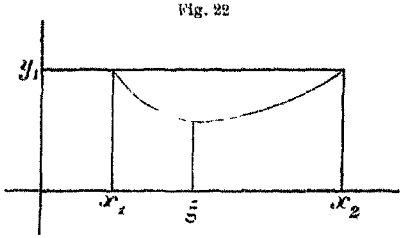
ist die Konstante $b$. Die Ableitung einer Konstanten ist Null. Die Ableitung der Independenten ist Eins.

Kehren wir zu der mit $y$ bezeichneten Funktion zurück und bilden aus ihr durch Addition der Konstanten $a$ die Funktion

$$y + a,$$

so besitzt auch diese eine Ableitung, nämlich wieder $y'$. Also ist $y$ nicht die einzige Funktion, von der $y'$ die Derivierte darstellt. Man nennt $y$ nach Lagrange eine primitive Funktion (Stammfunktion) von $y'$ in Bezug auf $x$. Ist $y$ eine Stammfunktion von $y'$, so ist $y +$ Konst. auch Stammfunktion von $y'$.

Fig. 22




Seien $x_1$ und $x_2$ Werte von $x$, $y_1$ und $y_2$ die zugehörigen Werte von $y$, und setzen wir voraus, dass $y$ bei $x_1$ und $x_2$ stetig, $y'$ zwischen $x_1$ und $x_2$ endlich ist, mithin $y$ stetig von $x_1$ bis $x_2$. Ist $y$ konstant in diesem Abschnitt, so ist daselbst $y'$ überall Null. Anderenfalls bilden die dort vorkommenden Werte von $y$ eine stetige Folge zwischen gewissen endlichen Grenzen, die selbst zu jenen Werten gehören. Von diesen Grenzen kann höchstens eine den Werten $x_1$ und $x_2$ als Funktionswert entsprechen, wenn $y_1$ mit $y_2$ zusammenfällt; unter dieser Voraussetzung kommt daher eine der Grenzen als Funktionswert vor zwischen $x_1$ und $x_2$, etwa bei $\xi$, so dass $y$ bei $\xi$ entweder den grössten oder den kleinsten Wert annimmt. Während $x$ die Stelle $\xi$ passiert, ist $y$ weder im Zunehmen noch im Abnehmen, dabei $y'$ nicht unendlich, folglich $y'=0$. Demnach verschwindet, im Falle dass $y_1=y_2$, die Derivierte $y'$ mindestens für einen Wert $\xi$ zwischen $x_1$ und $x_2$.

Setzen wir jetzt, ohne über das Verhältnis von $y_1$ zu $y_2$ etwas vorauszusetzen, die endliche Grösse

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=A$$

und betrachten die in dem ganzen Intervall endliche und nach $x$ differentiierbare Funktion

$$z=y-Ax,$$

die bei $x_1$ und $x_2$ denselben Wert annimmt, nämlich

$$y_1-Ax_1=y_2-Ax_2.$$

Auch $z$ ist bei $x_1$ und $x_2$ stetig, die Ableitung

$$z'=y'-A$$

zwischen $x_1$ und $x_2$ endlich; folglich verschwindet $z'$ mindestens für einen Wert $\xi$ zwischen $x_1$ und $x_2$, und man erhält:*

$$f'(\xi)-A=0, \quad \text{also} \quad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=f'(\xi).$$

*Wenn also die Funktion $y=f(x)$ von $x_1$ bis $x_2$ endlich, bei $x_1$ und $x_2$ stetig ist und zwischen $x_1$ und $x_2$ die endliche Ableitung $y'=f'(x)$ besitzt, so ist*

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=f'(\xi),$$

*wo $\xi$ einen gewissen Wert zwischen $x_1$ und $x_2$ bedeutet und*

$$y_1=f(x_1), \quad y_2=f(x_2).$$

Schreibt man $x$ für $x_1$, $x+h$ für $x_2$, so kann man für $\xi$

$$x+\theta h$$

setzen, wo $\theta$ einen positiven echten Bruch bedeutet, und erhält:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

* Beweis nach Ossian Bonnet; siehe Serret, Cours de calcul diff. et int. (II. éd.) T. I p. 17—19.

Über die Existenz von Differentialquotienten bei $x_1$ und $x_2$ selbst wird keine Voraussetzung gemacht.* Es variiere $x$ nur von $x_1$ bis $x_2$, mit Einschluss der Grenzen, dagegen $x_0$ nur zwischen $x_1$ und $x_2$; wird $f(x_0)$ mit $y_0$ bezeichnet, so kann man setzen:

$$\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = f'(\xi_0), \text{ wo } \xi_0 \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x_1.$$

*Wenn nun $f'(x_0)$ einem Grenzwerte $\eta$ zustrebt für $\lim x_0 = x_1$, so besitzt $y$ auch bei $x = x_1$ einen Differentialquotienten, nämlich $\eta$.*** Denn da $\xi_0$ näher bei $x_1$ liegt als $x_0$, so ist für $\lim x_0 = x_1$ auch:

$$\lim f'(\xi_0) = \eta, \quad \lim \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \eta.$$

Anwendungen von dieser Bemerkung finden sich in § 20 (gegen Ende) und § 26.

Aus dem vorstehenden Fundamentalsatze können wir unter Festhaltung der am Anfang des Paragraphen gemachten Voraussetzungen sofort einige Folgerungen ziehen. *Wenn $y'$ in dem ganzen Intervall endlich bleibt und zwischen den Grenzen desselben nur positive oder nur negative Werte annimmt, so ist $y$ beständig im Zunehmen bezw. im Abnehmen.* Denn für $x_1 < x_2$ fällt dann $y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f'(\xi)$ im ersten Falle immer positiv, im zweiten immer negativ aus. *Wenn $y'$ in dem ganzen Intervall endlich bleibt und zwischen den Grenzen desselben nie negative oder nie positive Werte annimmt, so nimmt $y$ nie ab, bezw. nie zu.* Ist in einem solchen Falle etwa $y_1 = y_2$, so hat $y$ in dem Abschnitt von $x_1$ bis $x_2$ einen und denselben Wert, so dass, wenn $y$ bei $x_1$ und $x_2$ denselben Wert annehmen soll, ohne von $x_1$ bis $x_2$ konstant zu sein, sowohl positive als auch negative Differentialquotienten zwischen $x_1$ und $x_2$ vorkommen müssen. *Demnach stellt in dem Fundamentalsatze die Grösse $f'(\xi)$ weder den grössten noch den kleinsten Wert dar, welchen $y'$ zwischen $x_1$ und $x_2$ erreicht,* wofern nicht $y$ sich zwischen $x_1$ und $x_2$ als lineare ganze Funktion von $x$ oder als Konstante ergiebt.

*Wenn $y'$ an einer bestimmten Stelle nicht bloss endlich, sondern auch stetig ist, so bleibt der Quotient*

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

* Vergl. Cantor, Crelles Journal Bd. 72 S. 141; Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali S. 75.

** Dini a. a. O. S. 82.

*der Grösse $y'$ beliebig nahe, so lange $x_1$ und $x_2$ hinreichend nahe bei $x$ liegen.* Die positive Zahl $\varepsilon$ sei beliebig gegeben; wählt man die positive Zahl $\delta$ hinreichend klein, so ist für jeden zwischen $x-\delta$ und $x+\delta$ gelegenen Wert $\xi$ der Independenten

$$\operatorname{abs}|f'(\xi)-y'|<\varepsilon;$$

werden also $x_1$ und $x_2$ zwischen $x-\delta$ und $x+\delta$ angenommen, so kommt:

$$\operatorname{abs}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-y'\right)<\varepsilon.$$

Und *wenn $y'$ in dem ganzen Intervall gleichmässig stetig ist, so kann bei beliebiger Wahl der positiven Zahl $\varepsilon$*

$$\operatorname{abs}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-y'\right)<\varepsilon, \quad \textit{überhaupt} \quad \operatorname{abs}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-y'\right)<\varepsilon$$

*gemacht werden dadurch, dass man* abs $\Delta x$, *bezw.* abs$(x_1-x)$ *und* abs$(x_2-x)$ *kleiner nimmt als eine gewisse positive Zahl $\delta$.*

Verschwindet $y'$ im ganzen Intervall, so treffen die Voraussetzungen des Fundamentalsatzes zu, wie auch $x_1$ und $x_2$ angenommen werden, und es ist immer $f'(\xi)=0$, folglich $y_1=y_2$, d. h. alle Funktionswerte sind einander gleich, $y$ reduciert sich auf eine Konstante. Sind $y$ und $\eta$ Funktionen, die in einem Intervall dieselbe endliche Ableitung $y'$ besitzen, so kann man auch die Funktion $\eta-y$ nach $x$ differentiieren und erhält:

$$\frac{d(\eta-y)}{dx}=\frac{d\eta}{dx}-\frac{dy}{dx}=y'-y'=0.$$

Demnach ist $\eta-y$ eine Konstante, $\eta=y+$ Konst. *Zwei Funktionen, welche dieselbe endliche Ableitung besitzen, differieren nur um eine Konstante.* Alle Stammfunktionen von $y'$ werden daher, wenn $y'$ endlich bleibt, durch den Ausdruck

$$y+a$$

dargestellt, wo $a$ eine willkürliche Konstante bedeutet. Ist z. B. $y'=b$ einer Konstanten gleich, so ist $bx$ eine Stammfunktion und die lineare ganze Funktion $a+bx$ mit dem willkürlichen Gliede $a$ stellt alle Stammfunktionen dar.

Wenn $y'$ im ganzen Intervall endlich und zwischen den Grenzen desselben von Null verschieden ist, so wird niemals $y_1=y_2$, wie auch $x_1$ und $x_2$ angenommen werden, d. h. $y$ nimmt keinen Wert mehr als einmal an; also ist $y$ entweder beständig im Zunehmen oder beständig im Abnehmen (§ 11 Seite 61), und $y'$ hat überall dasselbe Zeichen. Die Derivierte $f'(x)$ muss demnach zwischen $x_1$ und $x_2$ mindestens einmal verschwinden oder unendlich werden, falls $f'(x_1)$ und $f'(x_2)$ endliche Werte mit verschiedenem Zeichen sind. Betrachtet man statt $y$ die Funktion $y - Ax$ mit der Ableitung $y' - A$, so ergiebt sich der Satz: *Wenn $y'$ von $x_1$ bis $x_2$ endlich ist, so nimmt $y'$ jeden zwischen $f'(x_1)$ und $f'(x_2)$ gelegenen Wert zwischen $x_1$ und $x_2$ mindestens einmal an.* Aber die Stetigkeit der Funktion $y'$ folgt hieraus keineswegs.

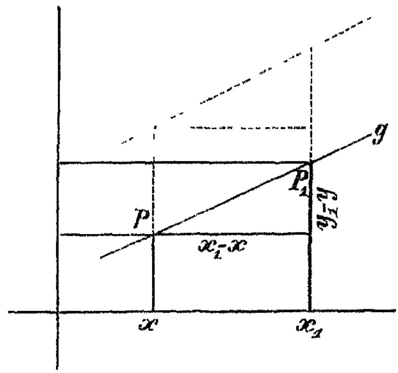
Zu den drei letzten Sätzen des § 13 lassen sich jetzt folgende Bemerkungen hinzufügen:

1. Wenn $y'$ im ganzen Intervall endlich und von Null verschieden ist, so liefert $y$ eine eindeutige und endliche Umkehrungsfunktion $x = \varphi(y)$ mit stetiger Variablen $y$, und $\varphi(y)$ besitzt eine Derivierte, welche dem reciproken Werte von $y'$ gleich ist.
2. Wird in der Funktion $f(x)$ das Argument $x$ als eine eindeutige Funktion $g(u)$ gegeben, welche in einem Intervall endlicher Werte von $u$ endlich bleibt und eine überall endliche, nicht verschwindende Ableitung $g'(u)$ besitzt, so entspricht der Funktion
$$f[g(u)] \text{ die Funktion } f'[g(u)]g'(u)$$
als Ableitung in Bezug auf die Variable $u$.
3. Nehmen wir endlich den Fall, wo $x$ und $y$ in einem Intervall endlicher Werte der Variablen $t$ als eindeutige und endliche Funktionen von $t$:
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$
gegeben sind und Ableitungen $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ in Bezug auf $t$ besitzen. Ist $\varphi'(t)$ überall endlich und von Null verschieden, so wird $y$ eine eindeutige und endliche Funktion von $x$ für ein gewisses Intervall endlicher Werte, und der Quotient
$$\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$
ist die Ableitung von $y$ in Bezug auf $x$.

## § 16. Die Tangenten einer ebenen Kurve.

In § 13 (Seite 72) wurde bemerkt, dass unter den dort geltenden Voraussetzungen die ebene Linie, welche in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird, in gewisser Umgebung des Punktes $(x, y)$ sich eng an eine gewisse Gerade anschliesst. Diese Gerade wird eine **Tangente** der Kurve genannt. Um den Zusammenhang der Tangente mit dem Differentialquotienten näher darzulegen, schicken wir einige Bemerkungen voraus, denen die Annahme eines Systemes rechtwinkliger Koordinaten in der Ebene zu Grunde liegt.

Fig 23.




Solange die beiden Punkte $P(x, y)$ und $P_1(x_1, y_1)$ auf einer Geraden $g$ bleiben, hat das Verhältnis

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = m$$

einen und denselben Wert; denn verlegt man etwa $P_1$ in der Geraden $g$ nach dem Punkte $P_2(x_2, y_2)$, so wird

$$\frac{y_2 - y}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Der Quotient $m$ erleidet auch dann keine Änderung, wenn man von der Geraden $g$ zu einer parallelen Geraden übergeht; durch die Richtung der Geraden $g$ wird die Zahl $m$ und umgekehrt durch $m$ die Richtung vollkommen bestimmt; man nennt $m$ deshalb die **Richtungskonstante** der Geraden $g$. Die Gleichung

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = m$$

zwischen den laufenden Koordinaten $x_1$, $y_1$ bedeutet die Gerade durch den Punkt $P$ mit der Richtungskonstante $m$. Für die Parallelen zur Abscissenaxe ist $m = 0$, für die Parallelen zur Ordinatenaxe ist $m = \infty$. Für alle anderen Geraden ist die Ordinate eine lineare ganze Funktion der Abscisse:

$$y_1 = mx_1 + (y - mx).$$

Durch den Punkt $Q(\xi, \eta)$, dessen Abscisse von $x$ verschieden sein soll, ziehen wir die Parallele $RQ$ zur Ordinatenaxe und lassen in ihr den Punkt $Q_0(\xi, \eta_0)$ variieren. Setzt man

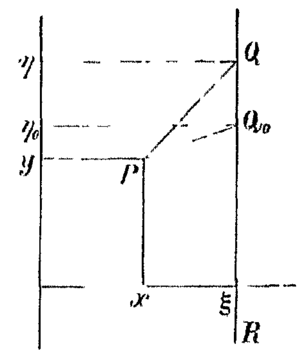
$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \mu, \quad \frac{\eta_0 - y}{\xi - x} = \mu_0,$$

so wird

$$\mu_0 - \mu = \frac{\eta_0 - \eta}{\xi - x}.$$

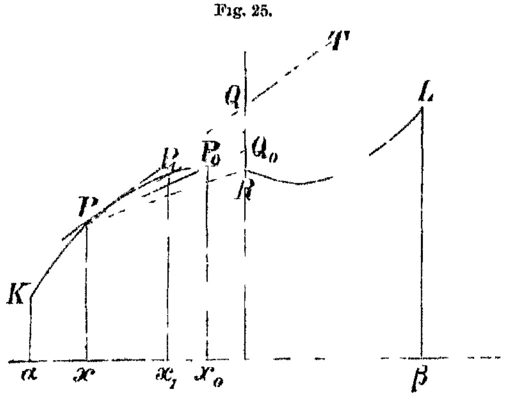
Man kann also die Richtungskonstante des Strahles $PQ_0$ der Richtungskonstante des Strahles $PQ$ beliebig nahe bringen, indem man $Q_0$ in der Geraden $RQ$ dem Punkte $Q$ hinreichend nähert; man kann die Richtungskonstante des Strahles $PQ_0$ dem absoluten Betrage nach beliebig gross machen, indem man dem Punkte $Q_0$ eine dem absoluten Betrage nach hinreichend grosse Ordinate zuerteilt.

Fig. 24.




Es sei jetzt $P(x, y)$ irgend ein Punkt der stetigen Plankurve $KL$, innerhalb deren sich keine Abscisse wiederholt; die Abscissen von $K$, $L$ seien $\alpha$, $\beta$ und zwar $\alpha < \beta$. Wenn (für $x < \beta$) die Linie $PL$ nicht in der Nähe von $P$ gerade ist, so nehme man auf ihr den Punkt $R$ so nahe bei $P$, dass kein durch $P$ gezogener Strahl dem Bogen $PR$ zwischen $P$ und $R$ mehr als einmal begegnet. Wie die Erfahrung lehrt, kann man allemal von $P$ aus einen Schenkel $PT$ derart ziehen, dass jeder von $P$ ausgehende und im (hohlen) Winkel $TPR$ gelegene Schenkel dem Bogen $PR$ zwischen $P$ und $R$ begegnet, während kein Punkt dieses Bogens sich ausserhalb des Winkels $TPR$ befindet. Man sagt vom Strahl $PT$ und vom Schenkel $PT$, dass sie die Linie $PL$ in $P$ berühren, und nennt die Gerade $PT$ die Tangente der Linie $PL$ im Punkte $P$. Die Richtungskonstante dieser Tangente werde mit $y'$ bezeichnet.

Fig. 25.

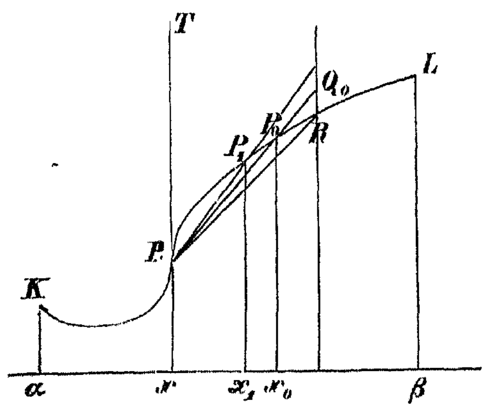



Nehmen wir zuerst $y'$ endlich. Der Schenkel $PT$ schneidet dann eine durch $R$ parallel zur Ordinatenaxe gelegte Gerade in einem Punkte $Q$, und man kann, wie klein auch die positive Zahl $\varepsilon$ gegeben sei, auf der Strecke $QR$ den Punkt $Q_0$ so nahe bei $Q$ wählen, dass die Richtungskonstante des Strahles $PQ_0$ von $y'$ um weniger als $\varepsilon$ differiert. Der Schenkel $PQ_0$ treffe den Bogen $PR$ im Punkte $P_0$ mit der Abscisse $x_0$; man setze $x_0 - x = \delta$ und nehme die Abscisse $x_1$ zwischen $x$ und $x + \delta$ beliebig; der entsprechende Punkt $P_1(x_1, y_1)$ der Kurve $PL$ liegt zwischen $P$ und $P_0$, also im Winkel $QPQ_0$, mithin die Richtungskonstante des Strahles $PP_1$ zwischen $y'$ und der des Strahles $PQ_0$, d. h. es ist

$$\operatorname{abs}\left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x} - y'\right) < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < x_1 - x < \delta.$$

Ist $y' = \infty$, so ziehe man wieder durch $R$ eine Parallele zur Ordinatenaxe und nehme auf ihr unter Einführung einer beliebigen positiven Zahl $\varrho$ den Punkt $Q_0$ innerhalb des Winkels $TPR$ derart, dass die Richtungskonstante des Strahles $PQ_0$ dem absoluten Betrage nach die Zahl $\varrho$ übertrifft. Der Schenkel $PQ_0$ treffe wieder den Bogen $PR$ im Punkte $P_0$ mit der Abscisse $x_0$; es wird $x_0 - x = \delta$ gesetzt, $x_1$ zwischen $x$ und $x + \delta$ beliebig angenommen

Fig. 26.




und der zugehörige Kurvenpunkt $P_1(x_1, y_1)$ zwischen $P$ und $P_0$ aufgesucht. Die Richtungskonstante des Strahles $PP_1$ hat alsdann dasselbe Zeichen, wie die des Strahles $PP_0$, aber grösseren absoluten Betrag. Also ist diesmal

$$\operatorname{abs}\frac{y_1 - y}{x_1 - x} > \varrho \quad \text{für} \quad 0 < x_1 - x < \delta.$$

Mag also $y'$ endlich sein oder nicht, immer kann man die Richtungskonstante der Sehne $PP_1$ dem Werte $y'$ beliebig nahe bringen, indem man die Abscisse von $P_1$ zwischen $x$ und $\beta$ in hinreichender Nähe bei $x$ hält. Deshalb werden die Eigenschaften der Linie $KL$ durch eine Gleichung $y = f(x)$ nur dann genügend wiedergegeben, wenn die Funktion $f(x)$ nicht bloss stetig ist, sondern auch der Differenzenquotient, welcher die Richtungskonstante der Sehne $PP_1$ darstellt, einem Grenzwerte für $\lim x_1 = x + 0$ zustrebt. Dieser Grenzwert wird der vorwärts genommene Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $x$ genannt und ist die Richtungskonstante der Tangente der Linie $PL$ im Punkte $P$. — Ist die Linie $PL$ in der Nähe von $P$ gerade, hat sie also dort mit einer Geraden eine Strecke gemein, so betrachtet man diese Gerade als Tangente. Längs jener Strecke hat $y$ die Form $a+bx$, wo $b$ die Richtungskonstante der Tangente und zugleich den vorwärts genommenen Differentialquotienten von $y$ in Bezug auf $x$ bedeutet.

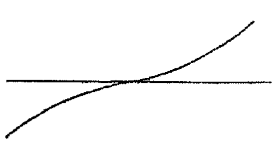
Es ist (für $x > \alpha$) ebenso notwendig, dass jener Differenzenquotient einem Grenzwerte zustrebt für $\lim x_1 = x - 0$; dieser heisst der rückwärts genommene Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $x$ und giebt die Richtung der Tangente der Linie $KP$ im Punkte $P$ an. Werden die Linien $KP$ und $PL$ in $P$ von einer und derselben Geraden berührt, so heisst diese die Tangente der Linie $KL$ im Punkte $P$; ihre Richtungskonstante ist der Grenzwert des Differenzenquotienten für $\lim x_1 = x$, also der Differentialquotient von $y$ in Bezug auf $x$. Lassen sich jedoch die Schenkel, welche $KP$ resp. $PL$ in $P$ berühren, nicht zu einer Geraden zusammenfügen, so hat im Punkte $P$ die Linie $KL$ keine Tangente, die Funktion $y$ keinen Differentialquotienten in Bezug auf $x$; die Linie bildet bei $P$ eine Ecke (Knie, point saillant, point anguleux).

Fig 27

Es kann sich ereignen, dass die beiden im Punkte $P$ zusammenstossenden Teile einer Kurve von einem und demselben Schenkel der Tangente berührt werden. Der Punkt $P$ heisst alsdann eine Spitze (point de rebroussement), und zwar von der ersten Art, wenn (in gewisser Nähe von $P$) die beiden Teile der Kurve auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen, von der zweiten Art (Schnabelspitze), wenn sie auf derselben Seite der Tangente liegen. Solange zu jeder Abscisse bloss eine Ordinate gehört, kann nur da eine Spitze — und zwar von der ersten Art — vorkommen, wo die Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht steht, also die Richtungskonstante $y' = \infty$ wird. Im allgemeinen werden beide Teile der Kurve in $P$ von verschiedenen Schenkeln der Tangente berührt und liegen (in gewisser

Fig. 28.

Fig. 29

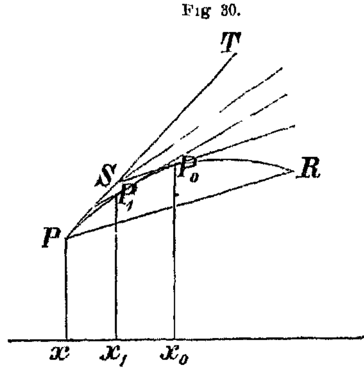


Nähe von $P$) auf derselben Seite der Tangente. Liegen jedoch die beiden Teile auf verschiedenen Seiten der Tangente, ohne von demselben Schenkel berührt zu werden, so wird $P$ ein Wendepunkt oder Inflexionspunkt genannt (Fig. 29).

Extreme Werte der Ordinate können nur da vorkommen, wo $y'$ verschwindet oder unendlich oder unbestimmt wird. Der Punkt $P$ sei zwischen $K$ und $L$ gelegen und in ihm eine bestimmte Tangente vorhanden, welche keine von $P$ ausgehende Strecke mit der Kurve gemein hat. Ist $y' = 0$, also die Tangente zur Abscissenaxe parallel, so tritt entweder ein extremer Wert der Ordinate oder ein Wendepunkt auf. Ist $y' = \infty$, also die Tangente auf der Abscissenaxe senkrecht, so ist $P$ entweder ein Wendepunkt oder eine Spitze; im letzteren Falle erreicht die Ordinate einen extremen Wert.

Wie auch die Linie $KL$ sich im Punkte $P$ verhalten mag, immer kann man auf der Linie $PL$ von $P$ aus ein Stück $PR$ abgrenzen, welches folgende Eigenschaften besitzt: Kein durch $P$ gezogener Strahl begegnet dem Bogen $PR$ mehr als einmal; zwischen $P$ und $R$ existiert überall eine Tangente, und der Bogen $PR$ liegt mit allen Punkten auf einer Seite der Tangente. Da zwischen $P$ und $R$ weder ein Knie, noch eine Spitze, noch ein Wendepunkt vorkommt, so besitzt $y$ zwischen $P$ und $R$ überall einen endlichen Differentialquotienten in Bezug auf $x$. Nach dem Fundamentalsatze des vorigen Paragraphen existiert also zwischen $P$ und $R$ mindestens ein Punkt $P_0(x_0, y_0)$, in welchem die Richtungskonstante der Tangente mit der der Sehne $PR$ übereinstimmt, d. h. die Sehne $PR$ läuft allemal parallel zu einer bestimmten Tangente am Bogen $PR$ zwischen $P$ und $R$. Nennen wir wieder $PT$ den Schenkel, welcher in $P$ berührt, so liegt $P_0$ im Winkel $TPR$, die Tangente in $P_0$ hat mit dem Schenkel $PT$ einen Punkt $S$ gemein. Nimmt man nun $P_1(x_1, y_1)$ zwischen $P$ und $P_0$, so kann seine Tangente der Sehne $PP_0$ nicht begegnen; die Parallele zu dieser Tangente durch $S$ kann nicht im Winkel $PSP_0$ liegen, sie fällt vielmehr in den Winkel $TSP_0$.

Fig. 30.




Man kann $R$ so nahe an $P$ wählen, dass die Richtungskonstante der Sehne $PR$, mithin auch die der Tangente $P_0S$ in beliebig vorgeschriebener Nähe bei $y'$ liegt. Wenn man dann die Abscisse $x_1$ zwischen $x$ und $x_0$ beliebig annimmt, so liegt auch die Richtungskonstante der Tangente des entsprechenden Kurvenpunktes in der vorgeschriebenen Nähe bei $y'$, d. h. die Richtungskonstante der Tangente verändert sich in der Linie $PL$ stetig beim Punkte $P$. Schliesst man also die Stellen aus, wo keine bestimmte Tangente existiert, so ist $y'$ als eine stetige Funktion von $x$ anzunehmen.

Die vorstehenden Betrachtungen beziehen sich auf die ebenen Linien, wie sie unmittelbar durch die Erfahrung gegeben sind. Sie treffen nicht mehr zu, wenn man den Begriff verallgemeinert, indem man die Ordinate irgend einer rein analytisch definierten Funktion der Abscisse gleich setzt.

## § 17. Das bestimmte Integral.

Wenn in einem Intervall endlicher Werte von $x$ die Funktion $F(x)$ durchweg eindeutig, endlich und nach $x$ differentiierbar ist und man bezeichnet mit

$$y = f(x)$$

die Ableitung von $F(x)$, so stellt $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ vor. Die Funktion $F(x)$ wird durch $f(x)$ nicht vollständig bestimmt. Wenn jedoch $y$ nirgends unendlich wird, so ist $F(x)$ bis auf eine additive Konstante bestimmt; hebt man alsdann aus dem Intervall einen Wert $a$ der Independenten heraus und bildet die Funktion

$$z = \varphi(x) = F(x) - F(a),$$

so ist $z$ eine b e s t i m m t e Stammfunktion von $y$. Es ist nämlich

$$\varphi(a) = 0$$

und mithin $z$ diejenige Stammfunktion, welche bei $a$ verschwindet. Es entsteht demnach die bestimmte Forderung, aus der Funktion $y = f(x)$, welche der Voraussetzung nach Stammfunktionen besitzt, die bei $a$ verschwindende Stammfunktion $z = \varphi(x)$ herzustellen, d. h. für jede (von $a$ verschiedene) Zahl $b$ im Intervall den Wert

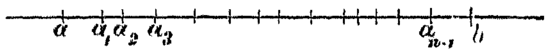
$$\varphi(b)$$

zu berechnen.

Bei der Besprechung dieser Aufgabe müssen wir zunächst an der Voraussetzung festhalten, *dass $y$ durchweg von $a$ bis $b$ endlich ist;* der Fall eines konstanten $y$ ist schon in § 15 erledigt. Zwischen $a$

und $b$ schalten wir auf beliebige Weise etwa $n-1$ Zahlen $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ ein, so dass $a a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b$ der Grösse nach geordnet erscheinen,

Fig 31.




und setzen

$$a_1 - a = h_1, \quad a_2 - a_1 = h_2, \; \ldots, \; b - a_{n-1} = h_n;$$

es ist dann

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = b - a,$$

und das Intervall von $a$ bis $b$ ist in $n$ Abschnitte zerlegt. Setzt man weiter:

$$\frac{\varphi(a_1) - \varphi(a)}{a_1 - a} = \eta_1,$$

so ist $\eta_1$ nach dem Fundamentalsatze des § 15 ein *bestimmter* Wert, den $y$ mindestens einmal annimmt, während $x$ die Werte zwischen $a$ und $a_1$ durchläuft. In entsprechender Bedeutung kann man $\eta_2 \ldots \eta_n$ für die übrigen Abschnitte einführen und erhält:

$$\varphi(a_1) - \varphi(a) = \eta_1 h_1, \; \varphi(a_2) - \varphi(a_1) = \eta_2 h_2, \ldots, \varphi(b) - \varphi(a_{n-1}) = \eta_n h_n,$$

daraus endlich wegen $\varphi(a) = 0$:

$$\varphi(b) = \eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \ldots + \eta_n h_n.$$

Zur Berechnung von $\varphi(b)$ wird dieses Resultat nicht genügen, da man nicht weiss, welche Werte für $\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n$ einzusetzen sind. Versteht man nun unter $y_1 y_2 \ldots y_n$ *beliebige* Werte von $y$ resp. aus dem ersten, zweiten, ..., $n^{\text{ten}}$ Abschnitt und bildet den Ausdruck

$$w = y_1 h_1 + y_2 h_2 + \ldots + y_n h_n,$$

so besteht allerdings zwischen $\varphi(b)$ und $w$ die Differenz

$$w - \varphi(b) = (y_1 - \eta_1) h_1 + (y_2 - \eta_2) h_2 + \ldots + (y_n - \eta_n) h_n;$$

aber *der Betrag dieser Differenz kann unter gewissen Umständen beliebig klein gemacht und infolgedessen der gesuchte Wert von $\varphi(b)$ mit beliebiger Annäherung durch $w$ ausgedrückt werden.* Führt man nämlich eine Zahl $h$ ein, welche nicht den Wert Null, aber alle positiven Werte annehmen kann, und schaltet $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ so zwischen $a$ und $b$ ein, dass die Beträge von $h_1 h_2 \ldots h_n$ kleiner als $h$ ausfallen, so gehören zu jedem Werte von $h$ unendlich viele Einteilungen des Intervalles $(a \ldots b)$, zu jeder Einteilung im allgemeinen unendlich viele Werte von $w$. Jedem Werte von $h$ sind also im allgemeinen unendlich viele Werte von $w$ zugeordnet, und diese gehören, wenn $h' < h$ ist, auch zu $h'$.* Man nimmt nun $h$ immer kleiner und kleiner; gelingt es dadurch, die Schwankungen von $w$ beliebig zu verkleinern, so strebt $w$ einem endlichen Grenzwerte zu für $\lim h = 0$, und es ergiebt sich:

$$\varphi(b) = \lim w \text{ für } \lim h = 0.$$

Sehen wir jetzt von der Frage ab, die uns zu diesem Grenzwerte geführt hat. Es sei $y = f(x)$ irgend eine eindeutige und endliche Funktion des endlichen Argumentes $x$, welches von $a$ bis $b$ variiert; indem wir es dahingestellt sein lassen, ob $y$ Stammfunktionen besitzt oder nicht, behalten wir die Buchstaben

$$n, \quad a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \quad h_1 h_2 \dots h_n, \quad y_1 y_2 \dots y_n, \quad w \text{ und } h$$

in ihrer bisherigen Bedeutung bei und fragen nach dem Grenzwerte von $w$ für $\lim h = 0$. Zu jedem Werte von $h$ gehören unendlich viele Einteilungen, aber für die zu derselben Einteilung gehörigen Werte von $w$ lässt sich die Schwankung auf folgende Weise ausdrücken. Sind $p_1 p_2 \dots p_n$ die unteren, $q_1 q_2 \dots q_n$ die oberen Grenzen von $y$ resp. im ersten, zweiten, ..., $n^{\text{ten}}$ Abschnitt, also

$$q_1 - p_1 = r_1, \quad q_2 - p_2 = r_2, \quad \dots, \quad q_n - p_n = r_n$$

die Schwankungen von $y$ in den einzelnen Abschnitten, dann sind, solange dieselbe Einteilung beibehalten wird, die Grössen

$$p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_n h_n, \quad q_1 h_1 + q_2 h_2 + \dots + q_n h_n$$

für $a < b$ untere resp. obere, für $a > b$ obere resp. untere Grenze von $w$. Mithin ist die Schwankung von $w$ bei fester Einschaltung $=$ abs $\varrho$, wo

$$\varrho = r_1 h_1 + r_2 h_2 + \dots + r_n h_n.$$

Wenn ferner $w_1$ irgend einer Einteilung entspricht, bei der als eingeschaltete Zahlen wieder $a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ auftreten, aber noch andere hinzukommen dürfen, so ist

$$\text{abs}\,(w - w_1) < \text{abs}\,\varrho.$$

Man gelangt nämlich von $w$ zu $w_1$, indem man jedes Glied von $w$ durch ein oder mehrere neue ersetzt. Es sei nun wieder zuerst $a < b$. Ist zwischen $a$ und $a_1$ keine weitere Einschaltung erfolgt, aber etwa $\eta_1$ für $y_1$ genommen, so tritt $\eta_1 h_1$ an Stelle von $y_1 h_1$ und es ist

$$\text{abs}\,(\eta_1 h_1 - y_1 h_1) < r_1 h_1.$$

Sind zwischen $a$ und $a_1$ irgend welche Zahlen eingeschaltet, und ist $h$ dadurch in die Teile $k_1 k_2 \dots$ zerlegt, so tritt an Stelle des Gliedes

* Vergl. die Schlussbemerkung in § 8.

$$y_1 h_1 \quad \text{d. i.} \quad y_1 k_1 + y_1 k_2 + \ldots$$

eine Summe von der Form

$$\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2 + \ldots,$$

wo $\eta_1 \eta_2 \ldots$ Werte von $y$ resp. aus dem ersten, zweiten, ... Teile des Abschnittes $(a \ldots a_1)$ sind, so dass

$$\text{abs}\,(\eta_1 - y_1) < r_1, \quad \text{abs}\,(\eta_2 - y_1) < r_1, \ldots$$

und wieder die Änderung des ersten Gliedes von $w$:

$$\text{abs}\,(\eta_1 k_1 + \eta_2 k_2 + \ldots - y_1 h_1) < r_1 h_1.$$

Demnach ist die Gesamtänderung aller Glieder nicht grösser als

$$r_1 h_1 + r_2 h_2 + \ldots + r_n h_n,$$

d. h. $\text{abs}\,(w - w_1) < \varrho$. Für $a > b$ ist $\text{abs}\,(w - w_1) < -\varrho$. Wenn endlich $w$ und $w'$ irgend welchen Einteilungen entsprechen, bei denen alle Abschnitte unter $h$ bleiben, so kann man die bei $w$ und $w'$ eingeschalteten Punkte zu einer neuen Einteilung vereinigen, welcher $w_1$ entsprechen mag. Bildet man $\varrho'$ für $w'$, wie $\varrho$ für $w$ gebildet wurde, so hat man:

$$w - w' = (w - w_1) + (w_1 - w'),$$

$$\text{abs}\,(w - w_1) < \text{abs}\,\varrho, \quad \text{abs}\,(w_1 - w') < \text{abs}\,\varrho',$$

folglich:

$$\text{abs}\,(w - w') < \text{abs}\,\varrho + \text{abs}\,\varrho'.$$

Jedem Werte von $h$ sind (im allgemeinen) unendlich viele Werte von $\varrho$ zugeordnet, und diese Werte gehören, wenn $h' > h$, auch zu $h'$; bei der obigen Bedeutung von $\varrho'$ gehören $\varrho$ und $\varrho'$ zu demselben Werte von $h$.

Besitzt nun $w$ einen endlichen Grenzwert für $\lim h = 0$, so ist, wenn die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig klein gewählt und dann $h$ hinreichend klein angenommen wird, die Differenz irgend zweier zu diesem $h$ gehörigen Werte von $w$ dem Betrage nach kleiner als $\varepsilon$. Es seien insbesondere $w$ und $w_1$ zwei zu diesem $h$ gehörige Werte, denen dieselbe Einteilung des Intervalles $(a \ldots b)$ zu Grunde liegt. Dann ist abs $\varrho$ die obere Grenze der Werte $\text{abs}\,(w - w_1)$, andererseits $\text{abs}\,(w - w_1) < \varepsilon$, folglich $\text{abs}\,\varrho < \varepsilon$, d. h. $\lim \varrho = 0$ für $\lim h = 0$. Umgekehrt: Ist $\lim \varrho = 0$ für $\lim h = 0$, so ist, wenn die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig gegeben und $h$ hinreichend klein angenommen wird, $\text{abs}\,\varrho < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\text{abs}\,\varrho' < \frac{1}{2}\varepsilon$, also $\text{abs}\,(w - w') < \varepsilon$, d. h. $w$ strebt einem endlichen Grenzwerte zu für $\lim h = 0$ (§ 9 Seite 45 f.).

*Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines endlichen Grenzwertes von $w$ für* $\lim h = 0$ *ist daher*

$$\lim \varrho = 0 \text{ für } \lim h = 0.$$

Man kann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, den Grenzübergang vollziehen, indem man in $w$ setzt:

$$y_1 = f(a),\quad y_2 = f(a_1),\ \ldots,\ y_n = f(a_{n-1})$$

oder

$$y_1 = f(a_1),\quad y_2 = f(a_2),\ \ldots,\ y_n = f(b)$$

oder

$$y_1 = \frac{f(a)+f(a_1)}{2},\quad y_2 = \frac{f(a_1)+f(a_2)}{2},\ \ldots,\ y_n = \frac{f(a_{n-1})+f(b)}{2};$$

bezüglich der Einteilung des Intervalles kann man sich auf gleiche Teile beschränken, so dass

$$h_1 = h_2 = \ldots = h_n = \frac{b-a}{n},\quad w = \frac{b-a}{n}(y_1 + \ldots + y_n).$$

Z. B. für $y = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b > 0$ ist wegen der gleichmässigen Stetigkeit der Funktion $y$ die Bedingung $\lim \varrho = 0$ erfüllt, wie gegen Ende dieses Paragraphen gezeigt werden wird. Nimmt man für $b$ eine positive ganze Zahl $k$ und teilt das Intervall von 1 bis $k$ in $km$ gleiche Teile, so kann man schreiben:

$$w = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}} + \frac{1}{1+\frac{2}{m}} + \ldots + \frac{1}{k}\right),$$

$$\lim w = \lim\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{km}\right) \text{ für } \lim m = \infty.^*$$

Wenn $w$ einen endlichen Grenzwert $\sigma$ besitzt, so wendet man eine gewisse Bezeichnung für ihn an, die jetzt erklärt werden soll. Zunächst führen wir ein:

$$h_1 = a_1 - a = \Delta_1 x,\quad h_2 = a_2 - a_1 = \Delta_2 x,\ \ldots,\ h_n = b - a_{n-1} = \Delta_n x$$

in Rücksicht darauf, dass diese Grössen Differenzen von Werten der Independenten vorstellen. Dadurch wird

$$w = y_1 \Delta_1 x + y_2 \Delta_2 x + \ldots + y_n \Delta_n x$$

eine Summe von Gliedern der Form $y\,\Delta x$ und deshalb

$$w = \mathbf{S}\, y\, \Delta x$$

geschrieben, wo der Buchstabe **S** das Wort „Summe" vertritt. Da nach unserer Voraussetzung

$$\sigma = \lim \mathbf{S}\, y\, \Delta x \text{ für } \lim h = 0,$$

* Siehe unten §§ 19 und 25.

so ist $\sigma$ von $\mathbf{S}\, y \Delta x$ für unendlich kleine $h$ unendlich wenig verschieden, d. h.

$$\sigma = \mathbf{S}\, y \Delta x \text{ mit beliebig kleinem Fehler,}$$

wenn man $h$ hinreichend klein nimmt. Die in Hinsicht auf eine bestimmte zu erzielende Genauigkeit dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Differenzen $\Delta x$ nennt man auch hier Differentiale und bezeichnet sie mit $dx$, so dass

$$\sigma = \mathbf{S}\, y dx \text{ mit erlaubtem Fehler.}$$

Hieraus ist die Bezeichnung (Leibnitz)

$$\sigma = \int y\, dx = \int f(x)\, dx$$

entstanden, gelesen: Integral von $y\, dx$ (Jacob Bernoulli). Die Bedeutung von $\sigma$ kann man aber aus dieser Bezeichnung nicht vollständig erkennen, da noch $a$ und $b$ angegeben sein müssen. Deshalb nennt man $\sigma$ das von $a$ bis $b$ erstreckte Integral von $y\, dx$ und schreibt (Fourier 1822):

$$\sigma = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx;$$

$a$ heisst die untere, $b$ die obere Grenze des Integrales; die Werte von $a$ bis $b$ bilden das Integrationsintervall.

Das Wort „Integral" wird noch in anderem Sinne gebraucht. Das soeben definierte Integral heisst ein bestimmtes oder definites Integral. Ein Integral bilden, in welchem Sinne das Wort auch zu verstehen sei, heisst integrieren. Die beim Integrieren anwendbaren Sätze und die Eigenschaften der Integrale machen den Inhalt der Integralrechnung aus.

War $y$ die Ableitung einer Funktion $F(x)$, also auch der Funktion $\varphi(x) = F(x) - F(a)$, so ist, wie schon bemerkt:

$$\sigma = \varphi(b), \quad \text{also } F(b) - F(a) = \int_a^b y\, dx.$$

Wir halten jedoch nur die Voraussetzung fest, *dass der endliche Grenzwert $\sigma$ existiert.* Wenn man $a$ mit $b$ vertauscht, so bleibt die Integrierbarkeit bestehen. Denn dann kommen die Zahlen

$$\begin{array}{lll} b,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a & \text{statt} & a,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ b, \\ -h_n,\ -h_{n-1},\ \ldots,\ -h_1 & \text{statt} & h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n, \end{array}$$

mithin $-w$ statt $w$. Nun besitzt $-w$ den endlichen Grenzwert $-\sigma$ für $\lim h = 0$, folglich ist

$$\int_a^b y\,dx = -\int_b^a y\,dx, \quad \int_a^b y\,dx + \int_b^a y\,dx = 0.$$

*Existiert also eines von diesen Integralen, so existiert auch das andere, und die Vertauschung der Grenzen hat nur einen Zeichenwechsel des Integralwertes zur Folge.*

Da abs $\varrho$ beliebig klein gemacht werden kann, so müssen $r_1 \dots r_n$ endliche Zahlen sein, ebenso $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_n$. Wird also mit $A$ die untere, mit $B$ die obere Grenze von $y$, mit $C$ die grössere der beiden Zahlen abs $A$ und abs $B$, also die obere Grenze von abs $y$ bezeichnet, so haben auch $A$, $B$, $C$ endliche Werte und es ist für $a < b$:

$$w \geqq Ah_1 + Ah_2 + \dots + Ah_n \quad \text{und} \quad w \leqq Bh_1 + Bh_2 + \dots + Bh_n,$$

d. h. $A(b-a) \leqq w \leqq B(b-a)$, folglich auch

$$A(b-a) \leqq \sigma \leqq B(b-a).$$

Dagegen ist $A(b-a) \geqq \sigma \geqq B(b-a)$ für $a > b$. *Setzt man daher*

$$\int_a^b y\,dx = \eta\,(b-a),$$

*so ist* $A \leqq \eta \leqq B$ *und* abs $\eta \leqq C$. Bei der Bildung des Grenzwertes $\sigma$ kann man aber die Bestimmung treffen, dass für $y_1$ nicht $f(a)$, für $y_n$ nicht $f(b)$ genommen werde. Treten nun, wenn man bloss die *zwischen $a$ und $b$* gelegenen Abscissen berücksichtigt, $A'$, $B'$, $C'$ an Stelle von $A$, $B$, $C$, so ist auch

$$A' \leqq \eta \leqq B' \quad \text{und} \quad \text{abs}\,\eta \leqq C'.$$

Man kann hieraus eine Folgerung ziehen für den Fall, wo $y$ nicht bloss von $x$, sondern noch von einer Variablen $t$ abhängt, welche etwa der Null beliebig nahe kommen kann. Wird $y$ mit $t$ in der Weise unendlich klein, dass bei hinreichend kleinem Betrage von $t$ die Werte von $y$ für alle $x$ aus dem Intervall $(a \dots b)$ in beliebig vorgeschriebener Nähe bei der Null liegen, so ist

$$0 = \lim \int_a^b y\,dx \quad \text{für} \quad \lim t = 0.$$

Strebt $y$ in derselben Weise einem beliebigen Grenzwerte zu für $\lim t = 0$, so ist

$$\int_a^b (\lim y)\,dx = \lim \int_a^b y\,dx \quad \text{für} \quad \lim t = 0.$$

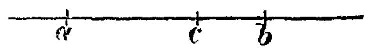
Die Grenzen der Integration mussten bisher von einander verschieden sein. Es empfiehlt sich aber, auch gleiche Grenzen zuzulassen und unter dem Zeichen

$$\int_a^a y\,dx$$

die Null zu verstehen. Die eben abgeleiteten Sätze bleiben dann giltig.

Es seien aber $a$ und $b$ wieder ungleich, $c$ eine Zahl zwischen $a$ und $b$. Man definiere $\varrho'$ und $w'$ für das Intervall $(a \dots c)$, $\varrho''$ und $w''$ für das Intervall $(c \dots b)$ in derselben Weise, wie $\varrho$ und $w$ für das Intervall $(a \dots b)$ definiert wurden.

Fig. 32.



Dann sind die Werte von $\varrho' + \varrho''$ auch Werte von $\varrho$, die von $w' + w''$ auch Werte von $w$, mithin

$$\lim (\varrho' + \varrho'') = 0 \quad \text{und} \quad \lim (w' + w'') = \sigma \quad \text{für} \quad \lim h = 0.$$

Da $\varrho'$ und $\varrho''$ dasselbe Zeichen besitzen, so ist abs $\varrho' \leqq$ abs $(\varrho' + \varrho'')$, $\lim \varrho' = 0$; folglich nähert sich $w'$ einem endlichen Grenzwerte, ebenso $w''$, und zwar ist $\lim w' + \lim w'' = \sigma$. *Man kann $y\,dx$ auch von $a$ bis $c$ und von $c$ bis $b$ integrieren und erhält:*

$$\int_a^c y\,dx + \int_c^b y\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

Umgekehrt: *Wenn man $y\,dx$ von $a$ bis $c$ und von $c$ bis $b$ integrieren kann, so kann man $y\,dx$ auch von $a$ bis $b$ integrieren.*

Beweis: Zufolge der Voraussetzung bleibt $y$ zwischen endlichen Grenzen von $x = a$ bis $x = b$. Ist nun $a_{i-1}$ in der Reihe $a_1\, a_2 \dots a_{n-1}$ die letzte Zahl, welche zwischen $a$ und $c$ liegt, und bezeichnet man die Schwankung von $y$ in dem Abschnitte $(a_{i-1} \dots c)$ mit $r'$, in dem Abschnitte $(c \dots a_i)$ mit $r''$, so kann man schreiben: $\varrho = \varrho' + \varrho'' + \theta$, wo

$$\theta = r_i h_i - r'(c - a_{i-1}) - r''(a_i - c) = (r_i - r')(c - a_{i-1}) + (r_i - r'')(a_i - c).$$

Da $0 \leqq r_i - r' \leqq B - A$, abs $(c - a_{i-1}) < h$, so wird

$$\text{abs}\,(r_i - r')(c - a_{i-1}) < h(B - A),$$

ebenso

$$\text{abs}\,(r_i - r'')(a_i - c) < h(B - A),$$

mithin abs $\theta < 2h(B - A)$, so dass für $\lim h = 0$:

$$\lim \varrho' = 0, \quad \lim \varrho'' = 0, \quad \lim \theta = 0$$

und folglich auch $\lim \varrho = 0$.

Eine Umkehrung des vorletzten Satzes ist auch der folgende: *Bleibt $y$ zwischen endlichen Grenzen von $x = a$ bis $x = b$, und ist $y\,dx$ integrierbar von $a$ bis zu jedem von $b$ verschiedenen Werte $x$ aus dem Intervalle $(a \dots b)$, so ist $y\,dx$ auch integrierbar von $a$ bis $b$.*

Beweis: Wir nehmen $a < b$ an, wählen die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig, die positive Zahl $\delta_1$ kleiner als $b - a$ und als $\frac{\varepsilon}{3(B - A)}$, und bezeichnen die zwischen $a$ und $b$ gelegene Zahl $b - \delta_1$ mit $c$. Wenn $a_{i-1}$ und $\varrho'$ dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Beweise, so ist

$$r_{i+1} + \dots + r_n = b - a_i \leq b - c, \quad r_1 h_1 + \dots + r_{i-1} h_{i-1} < \varrho',$$

$$r_i h_i < (B - A) h, \quad r_{i+1} h_{i+1} + \dots + r_n h_n < (B - A)\,\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3},$$

folglich

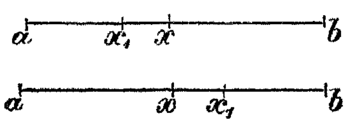
$$\varrho < \varrho' + (B - A) h + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nimmt man jetzt die positive Zahl $\delta_2$ so klein, dass abs $\varrho' < \frac{1}{3}\varepsilon$ für $h < \delta_2$, und bezeichnet mit $\delta$ die kleinere der beiden Zahlen $\delta_1$ und $\delta_2$, dann wird $\varrho < \varepsilon$ für $h < \delta$ und $\lim \varrho = 0$ für $\lim h = 0$.

Die unabhängige Variable konnte jeden Wert zwischen $a$ und $b$ annehmen und die Werte $a$, $b$ selbst; diese Werte bilden das Integrationsintervall für das Integral

$$\int_a^b y\,dx = \sigma.$$

Fig. 33.




Sind nun $x$ und $x_1$ irgend welche Werte der Independenten, so kann man $y\,dx$ von $a$ bis $x$, von $a$ bis $x_1$, von $x$ bis $x_1$ integrieren, gleichviel ob $x_1$ zwischen $a$ und $x$ oder zwischen $b$ und $x$ liegt. Es ist

$$\int_a^{x_1} y\,dx + \int_{x_1}^{x} y\,dx = \int_a^{x} y\,dx \quad \text{oder} \quad \int_a^{x} y\,dx + \int_x^{x_1} y\,dx = \int_a^{x_1} y\,dx;$$

dabei tritt der Buchstabe, welcher für die „Integrationsvariable" benutzt wird, zum Teil auch als Bezeichnung der oberen resp. unteren Grenze auf. Setzt man

$$\int_a^{x} y\,dx = u, \quad \int_a^{x_1} y\,dx = u_1, \quad \int_x^{x_1} y\,dx = \omega\,(x_1 - x),$$

so kommt:

$$u_1 - u = \omega (x_1 - x),$$

und da hier abs $\omega < C$, so ist bei festgehaltenem $x$:

$$\lim (u_1 - u) = 0 \quad \text{für} \quad \lim x_1 = x.$$

Die Grösse $u$ ist eine Funktion von $x$ in dem betrachteten Intervall. Wird

$$\int_a^x y\, dx = u = g(x)$$

gesetzt, so können wir $g(x)$ eine Integralfunktion von $y\, dx$ nennen und haben:

$$g(a) = 0, \quad g(b) = \sigma, \quad g(x_1) = u_1, \quad \lim u_1 = u \quad \text{für} \quad \lim x_1 = x.$$

*Demnach ist die Funktion $u$ durchweg endlich und stetig; aber $u$ ist nicht notwendig nach $x$ differentiierbar, und wo $u$ nach $x$ differentiiert werden kann, ist der Differentialquotient nicht notwendig $= y$.* Wir hatten

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \omega, \quad \text{wo} \quad \alpha \leq \omega \leq \beta,$$

wenn $\alpha$ die untere, $\beta$ die obere Grenze der Werte der $f$-Funktion bedeutet, die den Abscissen zwischen $x$ und $x_1$ entsprechen, aber ein Grenzwert von $\omega$ für $\lim x_1 = x$ braucht nicht zu existieren, und wenn er existiert, so kann er von $y$ verschieden sein. *Besitzt jedoch $f(x_1)$ einen Grenzwert $\xi$ für* $\lim x_1 = x$, *so ist $\xi$ endlich und stellt den Differentialquotienten von $u$ in Bezug auf $x$ an der betrachteten Stelle dar;* denn es ist dann

$$\text{abs}\, \xi \leq C, \quad \xi = \lim \alpha = \lim \beta = \lim w \quad \text{für} \quad \lim x_1 = x.$$

*Insbesondere wenn $y$ an der betrachteten Stelle stetig ist, so ist $y$ der Differentialquotient von $u$ in Bezug auf $x$*, da alsdann

$$y = \lim f(x_1) \quad \text{für} \quad \lim x_1 = x.$$

Endlich *wenn $y$ von $x = a$ bis $x = b$ die Ableitung einer Funktion $F(x)$ darstellt, so ist*

$$u = F(x) - F(a);$$

die bei $a$ verschwindende Stammfunktion von $y$ ist dann durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt:

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x y\, dx, \quad F(x) = \int_a^x y\, dx + \text{Konst.}$$

In diesem Falle ist (§ 15 Seite 83 f.)

$$A < \eta < B \quad \text{und} \quad \eta = f(\xi),$$

wo $\xi$ zwischen $a$ und $b$.

*Die Bedingung der Integrabilität ist stets erfüllt, wenn $y$ endlich und stetig ist von $x=a$ bis $x=b$.* Dann ist nämlich $y$ gleichmässig stetig in diesem Intervall. Nimmt man also die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig und setzt unter der Voraussetzung $a<b$:

$$\zeta=\frac{\varepsilon}{b-a},$$

so ist für hinreichend kleines $h$:

$$\text{abs}\,[f(x)-f(x_1)]<\zeta, \quad \text{sobald} \quad \text{abs}\,(x-x_1)<h.$$

Diesmal ist $p_1$ der kleinste, $q_1$ der grösste Wert von $y$ im ersten Abschnitt; die zugehörigen Abscissen differieren um weniger als $h$, folglich ist $r_1=q_1-p_1<\zeta$. Ebenso ist $r_2<\zeta, \ldots, r_n<\zeta$, folglich

$$\varrho<\zeta\,(h_1+h_2+\ldots+h_n), \quad \text{d. i.} \quad \varrho<\varepsilon, \quad \lim\varrho=0 \quad \text{für} \quad \lim h=0.$$

Dasselbe ergiebt sich für $a>b$. — Die Funktion $u$ ist in diesem Falle nicht bloss endlich und stetig, sondern auch durchweg nach $x$ differentiierbar und $y$ der Differentialquotient.

*Wenn also die Funktion $y$ des Argumentes $x$ endlich und stetig ist in einem Intervall endlicher Werte, zu denen $a$ gehört, so besitzt $y$ Stammfunktionen, und zwar stellt das bestimmte Integral*

$$\int_a^x y\,dx=\varphi(x)$$

*die bei $a$ verschwindende Stammfunktion dar.* Diese ist endlich und stetig.

Wir haben bisher vom Integrationsintervall alle Stellen ausgeschlossen, wo die zu integrierende Funktion unendlich wird, und nur endliche Zahlen als Grenzen zugelassen. Man ist aber übereingekommen, den Begriff des bestimmten Integrales unter Umständen auszudehnen. Es seien nämlich $a$ und $b$ endliche Zahlen, $y$ eine eindeutige Funktion der stetigen Variablen $x$ im Intervall von $x=a$ bis $x=b$. Kann man $y\,dx$ nach den bisherigen Bestimmungen von $a$ bis $b$ integrieren, so ist $y\,dx$ auch integrierbar von $a$ bis zu jedem von $b$ verschiedenen Werte $x$ aus dem Intervall, und man hat:

$$\int_a^b y\,dx=\lim\int_a^x y\,dx \quad \text{für} \quad \lim x=b.$$

Kann jedoch die Integration von $a$ bis $b$ nach den bisherigen Bestimmungen nicht zugelassen werden, so ist es nicht notwendig, dass $y\,dx$ von $a$ bis zu jedem von $b$ verschiedenen Werte $x$ aus dem Intervall integriert werden kann, und wenn dies möglich ist,* so braucht das von $a$ bis $x$ erstreckte Integral keinem Grenzwerte zuzustreben für $\lim x = b$. Wenn aber beides der Fall ist, so nennt man den sich ergebenden Grenzwert das von $a$ bis $b$ erstreckte Integral und schreibt:

$$\int_a^b y\,dx = \lim\int_a^x y\,dx \quad \text{für} \quad \lim x = b.$$

Wenn ferner $y\,dx$ von $a$ bis zu jedem die Zahl $a$ übertreffenden Werte $x$ integrierbar ist und überdies das von $a$ bis $x$ erstreckte Integral einem Grenzwerte zustrebt für unbegrenzt wachsende $x$, so nennt man diesen Grenzwert das von $a$ bis $+\infty$ erstreckte Integral und schreibt:

$$\int_a^{+\infty} y\,dx = \lim\int_a^x y\,dx \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty.$$

Ist $y\,dx$ von $a$ bis zu jedem unter $a$ gelegenen Werte $x$ integrierbar und ein Grenzwert des von $a$ bis $x$ ausgedehnten Integrales für endlos abnehmende $x$ vorhanden, so heisst dieser Grenzwert das von $a$ bis $-\infty$ erstreckte Integral:

$$\int_a^{-\infty} y\,dx = \lim\int_a^x y\,dx \quad \text{für} \quad \lim x = -\infty.$$

Das Entsprechende gilt für die untere Grenze.

## § 18. Das unbestimmte Integral.

Die Begriffe Stammfunktion und Integralfunktion lassen sich, wie wir gesehen haben, überall wo beide anwendbar sind, auf einander zurückführen. Da man ursprünglich nur solche Fälle in Betracht ziehen konnte, so war man berechtigt, die Integralfunktion geradezu als Stammfunktion zu definieren. Daher kommt es, dass jede Funktion von $x$, welche in Bezug auf $x$ die Derivierte $y$ oder das Differential $y\,dx$ besitzt, eine Integralfunktion oder ein Integral von $y\,dx$ genannt und mit

$$\int y\,dx$$

* Ist $y\,dx$ integrierbar von $a$ bis zu jedem von $b$ verschiedenen Werte aus dem Intervall, so ist zwar $y\,dx$ auch von $a$ bis $b$ integrierbar, wenn $y$ zwischen endlichen Grenzen bleibt von $x = a$ bis $x = b$ (Seite 100), aber nicht, wenn $y = \infty$ wird für $x = b$ oder $y$ dem Betrage nach beliebig grosse Werte annehmen kann, während $x$ sich der Zahl $b$ nähert.

bezeichnet wird. Bedeutet $F(x)$ irgend eine Stammfunktion von $y$, so hat man:

$$\int y\,dx = F(x) + C,$$

wo $C$, die Integrationskonstante, eine beliebige von $x$ unabhängige Grösse ist. Wegen des Auftretens dieser Konstanten nennt man das soeben eingeführte Integral das unbestimmte (indefinite) Integral von $y\,dx$. Wird der Konstanten $C$ ein specieller Wert beigelegt, so erhält man ein partikuläres Integral von $y\,dx$. Versteht man unter $a$ und $b$ Werte der Independenten $x$, der Integrationsvariablen, unter $\varphi\,(x)$ die bei $a$ verschwindende Funktion

$$\varphi\,(x) = F(x) - F(a),$$

so schreibt man auch in dem jetzigen Sinne:

$$\varphi\,(x) = \int_a^x y\,dx, \quad \text{also} \quad \int_a^b y\,dx = \varphi\,(b) = F(b) - F(a)$$

und nennt diese Ausdrücke bestimmte Integrale. *Hiernach erhält man das bestimmte Integral aus dem unbestimmten, indem man in letzteres für $x$ die untere und die obere Grenze des ersteren einträgt und den ersten Wert vom zweiten subtrahiert.*

Im folgenden wird von Integralen nur in diesem Sinne die Rede sein. So oft dann $y$ die im vorigen Paragraphen gefundenen Bedingungen erfüllt, insbesondere wenn $y$ in einem Intervall endlich und stetig ist, kann das Integral als Grenzwert einer gewissen Summe aufgefasst werden. Wir haben auch jetzt, wenn $a$, $b$, $c$ Werte der Independenten sind:

$$\int_a^a y\,dx = 0, \quad \int_a^b y\,dx = -\int_b^a y\,dx, \quad \int_a^c y\,dx + \int_c^b y\,dx = \int_a^b y\,dx$$

und wenn $y$ endlich ist von $x = a$ bis $x = b$:

$$\int_a^b y\,dx = (b - a)\,\eta,$$

wo $\eta$ einen bestimmten zwischen $a$ und $b$ vorkommenden Wert von $y$ bedeutet. Die elementarsten Sätze der Integralrechnung fliessen aus denen der Differentialrechnung. Ob nämlich eine vorgelegte Funktion das Integral von $y\,dx$ sei, wird durch Differentiation erkannt; es muss der nach $x$ genommene Differentialquotient

$$\frac{d}{dx}\int y\,dx = y \quad \text{oder} \quad d\int y\,dx = y\,dx$$

sein. So überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Sätze.

*Tritt zu einer Funktion ein konstanter Faktor oder Divisor* $a$, *so tritt derselbe auch zu ihrem Integral:*

$$\int a\,y\,dx = a\int y\,dx,\quad \int \frac{y}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int y\,dx;$$

insbesondere ist

$$\int -y\,dx = -\int y\,dx.$$

*Eine Summe oder Differenz integriert man, indem man die Glieder einzeln integriert:*

$$\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx,\quad \int (u-v)\,dx = \int u\,dx - \int v\,dx.$$

Dieser Satz gilt für Summen von beliebig vielen Gliedern.

*Wenn* $n$ *eine rationale Zahl ist, aber nicht* $= -1$, *so hat man:*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Hieraus ergeben sich zunächst die Formeln

$$\int dx = x + C,\quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C,\quad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ u. s. f.},$$

mit deren Hilfe man jede ganze Funktion

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n$$

integriert. Es ist

$$\begin{aligned}\int (a+bx+cx^2+\ldots+kx^n)\,dx &= \int a\,dx + \int bx\,dx + \int cx^2\,dx + \ldots + \int kx^n\,dx\\ &= a\int dx + b\int x\,dx + c\int x^2\,dx + \ldots + k\int x^n\,dx\\ &= C + ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \ldots + \frac{k}{n+1}x^{n+1},\end{aligned}$$

also das Integral einer ganzen Funktion ist wieder eine ganze Funktion und zwar vom nächst höheren Grade.

Man findet ferner folgende Integrale von gebrochenen rationalen Funktionen:

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,\quad \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C,\quad \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C \text{ u. s. f.}$$

Wenn man endlich für $n$ gebrochene Zahlen einträgt, so erhält man Integrale von irrationalen entwickelten algebraischen Funktionen, z. B.

$$\int \sqrt{x}\,dx = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Diese Formeln reichen in vielen Fällen zur Integration von entwickelten algebraischen Funktionen aus, aber nicht immer, da sie schon für das Integral

$$\int \frac{dx}{x}$$

keinen Ausdruck liefern.

Die Integration wird oft durch Einführung einer anderen Variablen erleichtert. In dem Integral

$$Y = \int y\, dx$$

kann die Variable $u$ für $x$ substituiert werden, wenn sich $x$ als Funktion von $u$ darstellt und $u$ als Funktion von $x$, und wenn überdies $x$ sich nach $u$ differentiieren lässt. Es ist nämlich $y$ die Ableitung von $Y$ in Bezug auf $x$. Durch die Substitution werden $x$, $y$, $Y$ Funktionen von $u$, und die Ableitung von $Y$ in Bezug auf $u$ erhält man, indem man $y$ mit der Ableitung von $x$ nach $u$ multipliciert, d. h. es wird

$$Y = \int y \frac{dx}{du}\, du.$$

Das vorgelegte Integral ist somit in ein anderes transformiert, wo $u$ die Integrationsvariable und

$$y \frac{dx}{du}$$

die zu integrierende Funktion ist. Kann man das transformierte Integral auswerten, so erhält man $Y$ als Funktion von $u$ und mittels der Rücksubstitution (inversen Substitution) schliesslich als Funktion von $x$.

Wenn $a$ und $b$ Werte von $x$ sind, denen resp. $\alpha$ und $\beta$ als Werte von $u$ entsprechen, so ist

$$\int_a^x y\, dx = \int_\alpha^u y \frac{dx}{du}\, du, \quad \int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta y \frac{dx}{du}\, du.$$

Setzt man beispielsweise, $a$ und $b$ konstant gedacht, $b$ nicht null:

$$a + bx = u, \quad \text{also} \quad x = \frac{u-a}{b},$$

so wird

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{b}, \quad \int (a+bx)^n\, dx = \int \frac{u^n}{b}\, du = \frac{1}{b}\int u^n\, du.$$

Ist also $n$ rational und von $-1$ verschieden, so kommt:

$$\int (a+bx)^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{b(n+1)} + C = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$$

Wir sehen bei Gelegenheit der Substitution, dass im unbestimmten Integral das Differential ebenso behandelt wird, wie in der Differentialrechnung. Infolgedessen schreibt man, wenn $u$ und $v$ Funktionen von $x$ sind, $v'$ die Ableitung von $v$:

$$\int u\,dv \quad \text{für} \quad \int u v'\,dx.$$

Ein Faktor der zu integrierenden Funktion ist die Ableitung einer Funktion $v$. Besitzt nun $u$ die Ableitung $u'$, so dass

$$d(uv) = (uv' + vu')\,dx, \quad \text{also} \quad uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx,$$

so erhält man folgende Formel, welche die sogenannte **teilweise Integration** darstellt:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du = uv - \int vu'\,dx.$$

Hierdurch zerlegt sich das erste Integral in zwei Teile, von denen der eine keine Integration mehr erfordert, und es ist die Integration der Funktion $uv'$ auf die der Funktion $vu'$ zurückgeführt. Beim Übergange zum bestimmten Integral ergiebt sich:

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'\,dx.$$

Bedeutet nämlich $X$ irgend einen Ausdruck, der $x$ enthält, so wird unter dem Zeichen

$$[X]_a^b$$

die Differenz der beiden Werte von $X$ verstanden, die beim Eintragen von $a$ und $b$ für $x$ herauskommen, den ersteren als Subtrahend genommen.

So ist

$$\int (1+x)\frac{dx}{x^2} = \int (1+x)\,d\frac{-1}{x} = -\frac{1+x}{x} - \int -\frac{1}{x}\,d(1+x)$$
$$= -\frac{1+x}{x} + \int \frac{dx}{x}.$$

Auf direkterem Wege findet man:

$$\int (1+x)\frac{dx}{x^2} = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} + \int \frac{dx}{x}.$$

Scheinbar weichen beide Ergebnisse von einander ab, da im zweiten das Glied $-1$ fehlt; indess muss man sich erinnern, dass die Ergebnisse stets um konstante Zahlen differieren dürfen. Das Integral ist übrigens nicht ausgewertet, sondern nur auf das schon erwähnte Integral

$$\int \frac{dx}{x}$$

zurückgeführt, zu dessen Untersuchung wir uns jetzt wenden.

## § 19. Exponentialfunktion und Logarithmus.

Die Variable $x$ werde auf das Intervall zwischen 0 und $+\infty$, also auf die endlichen positiven Werte beschränkt. Alsdann ist der reciproke Wert von $x$ eine endliche und stetige Funktion von $x$; zu ihm gehören also Stammfunktionen, und wir wollen die bei $x=1$ verschwindende Stammfunktion mit $y$ oder $f(x)$ bezeichnen, so dass

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = y = f(x), \quad f(1) = 0.$$

Die Derivierte von $y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

ist überall positiv, folglich $y$ nicht bloss endlich und stetig, sondern auch beständig im Wachsen. Demnach ist $y$ positiv für $x > 1$, negativ für $x < 1$.

Im folgenden werden unter $a$ und $b$ positive Zahlen verstanden. Bei der Substitution

$$ax = u$$

wird auch $u$ positiv; $x=1$ giebt $u=a$, $x=b$ giebt $u=ab$. Aus

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$$

folgt:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \int_a^{ab} \frac{du}{u} = \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} - \int_1^a \frac{dx}{x}$$

oder

$$f(ab) = f(a) + f(b),$$

was auf beliebig viele (positive) Faktoren ausgedehnt werden kann. Schreibt man $\frac{b}{a}$ für $b$, so kommt:

$$f\left(\frac{b}{a}\right) = f(b) - f(a), \quad \text{insbesondere} \quad f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a).$$

Bedeutet $n$ irgend eine von Null verschiedene rationale Zahl, $x^n$ einen positiven Wert und wird

$$u = x^n$$

eingeführt, so ist $u = 1$ für $x = 1$, $u = a^n$ (positiv) für $x = a$, und man erhält:

$$\frac{du}{u} = n\frac{dx}{x}, \quad \int\limits_1^{a^n}\frac{du}{u} = n\int\limits_1^{a}\frac{dx}{x}.$$

Folglich gilt für jede rationale Zahl $n$ die Gleichung:

$$f(a^n) = n f(a), \quad \text{wo } a^n \text{ positiv.}$$

Man sieht hieraus, dass $y$ beliebig grosse Werte annimmt. Wählt man nämlich $a > 1$, so fällt $f(a)$ positiv aus, und um einen Funktionswert $f(a^n)$, grösser als eine gegebene Zahl, zu erlangen, nimmt man einen hinreichend grossen Exponenten $n$. Mithin ist

$$\lim y = +\infty \quad \text{für} \quad \lim x = +\infty,$$

d. h. wenn $x$ zwischen 1 und $+\infty$ variiert, so durchläuft $y$ wachsend alle positiven Zahlen. Variiert $x$ dagegen zwischen 1 und 0, so durchläuft $y$ abnehmend alle negativen Zahlen, da $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, und man hat:

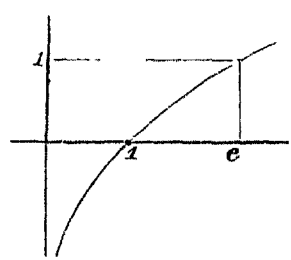
$$\lim y = -\infty \quad \text{für} \quad \lim x = 0.$$

Dieser Verlauf wird durch die beigefügte Figur veranschaulicht. Man kann nun die Werte 0 und $+\infty$ dem Intervall von $x$ einfügen mit der Bestimmung, dass

$$f(0) = -\infty, \quad f(+\infty) = +\infty.$$

Auch dann ist $y$ eine durchweg stetige Funktion von $x$, die keinen Wert mehr als einmal annimmt.

Fig 34.




Das Integral $y$ besitzt Grenzwerte für $\lim x = 0$ und für $\lim x = +\infty$. Den Wert $x = 0$ hatten wir ausschliessen müssen, weil bei ihm die zu integrierende Funktion unendlich wird, den Wert $x = \infty$, weil wir von vornherein nur endliche Zahlen als Grenzen kannten. In Rücksicht auf die Erweiterungen, welche der Begriff des bestimmten Integrales am Schluss des § 17 erfahren hat, können wir jedoch auch jene Grenzwerte $f(0)$ und $f(+\infty)$ als Integrale schreiben, nämlich

$$\int_1^0 \frac{dx}{x} = f(0) = -\infty, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = f(+\infty) = +\infty.$$

Die Funktion $f(x)$ lässt infolge ihres oben beschriebenen Verhaltens eine eindeutige und stetige Umkehrungsfunktion

$$x = \varphi(y)$$

zu, deren Argument $y$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, während sie selbst in beständigem Zunehmen von $0$ bis $+\infty$ variiert. Man hat:

$$\varphi(-\infty) = 0, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi(+\infty) = +\infty.$$

Für $y < 0$ ist $x < 1$, für $y > 0$ ist $x > 1$. Führt man wieder eine endliche und von Null verschiedene, positive Zahl $a$ ein und setzt der Kürze halber

$$f(a) = A,$$

so ist auch $\varphi(yA)$ eine stetige Funktion von $y$. Für jedes *rationale* $n$ ist:

$$f(a^n) = nA, \quad \varphi(nA) = a^n, \quad \text{wo } a^n \text{ positiv},$$

also $\varphi(nA)$ als $n^{\text{te}}$ Potenz von $a$ berechenbar. Da man jedes *irrationale* $n$ als Grenzwert einer rationalen Veränderlichen $r$ darstellen kann, so ist auch für irrationale $n$:

$$\varphi(nA) = \lim a^r \quad \text{für} \quad \lim r = n.$$

Dass die positive Potenz $a^r$ sich einem Grenzwerte nähert, wenn $r$ einem Grenzwerte $n$ zustrebt, ist bereits bemerkt worden; es beruht auf dieser Thatsache die Erweiterung, welche der Potenzbegriff erfahren hat, indem man auch den Grenzwert von $a^r$ eine Potenz nennt, und zwar die $n^{\text{te}}$ Potenz von $a$, und für diese Potenz dasselbe Zeichen wie für die Potenzen mit rationalem Exponenten in Gebrauch nimmt. Die (reelle positive) $y^{\text{te}}$ Potenz von $a$ wird hiernach für alle $y$ durch $\varphi(yA)$ dargestellt:

$$\varphi[y\, f(a)] = a^y, \quad f(a^y) = y\, f(a).$$

Von grösster Wichtigkeit für die Auffassung der Funktion $\varphi(y)$ ist die Zahl $\varphi(1)$, die man nach **Euler** mit $e$ bezeichnet und als eine irrationale Zahl erkannt hat. Es ist*

---

* Vergl. unten § 27.

$$\varphi(1) = e = 2{,}7182818\ldots, \quad f(e) = 1.$$

Indem man $e$ für $a$ einsetzt, erhält man:

$$\varphi(y) = e^y, \quad e^{f(x)} = x, \quad e^{y f(a)} = a^y,$$

d. h. $\varphi(y)$ bedeutet die (reelle positive) $y^{\text{te}}$ Potenz der Grundzahl $e$. Die Funktion $a^y$ des Argumentes $y$ wird eine Exponentialfunktion genannt, weil $y$ als Exponent zur konstanten Grundzahl $a$ hinzutritt; im engeren Sinne heisst $e^y$ die Exponentialfunktion. Besondere Werte sind:

$$e^{-\infty} = 0, \quad e^{+\infty} = +\infty, \quad 1^y = 1 \quad \text{für alle endlichen } y,$$
$$a^{-\infty} = e^{+\infty} = +\infty, \quad a^{+\infty} = e^{-\infty} = 0 \quad \text{für } 0 < a < 1,$$
$$a^{-\infty} = e^{-\infty} = 0, \quad a^{+\infty} = e^{+\infty} = +\infty \quad \text{für } a > 1.$$

Dagegen ergeben sich keine bestimmten Werte für

$$0^0, \quad 0^\infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad \infty^\infty.$$

Die mit dem Potenzbegriff vorgenommene Erweiterung bewährt sich dadurch, dass alle Regeln für die Rechnung mit Potenzen giltig bleiben. Aus den Eigenschaften der Integralfunktion

$$f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

ergiebt sich dies folgendermassen. Für positive $a, b$ und beliebige $\alpha$, $\beta$ ist zunächst

$$f(a^\alpha) = \alpha f(a), \quad f(a^\beta) = \beta f(a) \quad \text{u. s. w.},$$

folglich:

$$f(a^\alpha a^\beta) = f(a^\alpha) + f(a^\beta) = (\alpha + \beta) f(a) = f(a^{\alpha+\beta}),$$
$$f[(a^\alpha)^\beta] = \beta f(a^\alpha) = \alpha\beta f(a) = f(a^{\alpha\beta}),$$
$$f[(ab)^\alpha] = \alpha f(ab) = \alpha f(a) + \alpha f(b) = f(a^\alpha) + f(b^\alpha) = f(a^\alpha b^\alpha)$$

und mithin:

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$
$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}, \quad \left(\frac{1}{b}\right)^\alpha = \frac{1}{b^\alpha} = b^{-\alpha}.$$

Wir nehmen $a$ von 0, 1, $\infty$ verschieden und betrachten die eindeutige und stetige Funktion des Argumentes $y$:

$$a^y = e^{y f(a)} = z.$$

Während $y$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, durchläuft $z$ für $0 < a < 1$ alle Werte von $+\infty$ bis 0, für $a > 1$ alle Werte von 0 bis $+\infty$; also ist $y$ für das Intervall von $z = 0$ bis $z = +\infty$ vollkommen bestimmt als der Exponent derjenigen Potenz von $a$, die den Wert $z$ hat. Dieser Exponent heisst aber der Logarithmus von $z$ in Bezug auf die Basis $a$:

$$y = {}^a\log z,$$

so dass

$${}^a\log 1 = 0, \quad {}^a\log a = 1, \quad {}^a\log a^y = y, \quad a^{{}^a\log y} = y, \quad {}^e\log x = f(x).$$

Die Logarithmen, welche zu einer und derselben (von 0, 1, $\infty$ verschiedenen, übrigens positiven) Basis gehören, bilden ein Logarithmensystem. Für die Analysis ist von besonderer Bedeutung das System mit der Basis $e$, das sogenannte natürliche oder Npersche Logarithmensystem. Im Gegensatz zu diesem heissen die anderen künstliche Systeme; zu den letzteren gehört das gemeine (vulgäre, Briggische, dekadische) Logarithmensystem mit der Basis 10. Es ist also $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen, die wir kurz mit log bezeichnen und im engeren Sinne Logarithmen nennen werden. Die Logarithmen aus verschiedenen Systemen lassen sich leicht aufeinander zurückführen; es ist

$$z = a^y = \left(b^{{}^b\log a}\right)^y = b^{y \,.\, {}^b\log a} = b^{{}^b\log a \,.\, {}^a\log z},$$

folglich

$${}^b\log z = {}^b\log a \,.\, {}^a\log z,$$

woraus für $z = b$:

$${}^b\log a = \frac{1}{{}^a\log b}, \quad \text{also} \quad {}^b\log z = \frac{{}^a\log z}{{}^a\log b}.$$

Insbesondere dient zur Zurückführung auf natürliche Logarithmen die Formel:

$${}^a\log z = \frac{\log z}{\log a},$$

in welcher der sogenannte Modulus des Systems mit der Basis $a$

$$\frac{1}{\log a} = {}^a\log e$$

vorkommt. Aus den Eigenschaften der Funktion $f(x)$ ergeben sich, da $f(x) = \log x$, ohne weiteres die Grundregeln für die Rechnung mit den natürlichen Logarithmen, welche leicht auf beliebige übertragen werden, nämlich:

$$\log(ab) = \log a + \log b, \quad \log\frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log a^\alpha = \alpha\log a,$$

insbesondere

$$\log\frac{1}{b} = -\log b, \quad \log e^x = x, \quad e^{\log x} = x.$$

Die Funktion $\log x$ ist auf positive Argumente beschränkt; variiert $x$ von $0$ bis $+\infty$, so variiert $\log x$ stetig in beständigem Wachsen von $-\infty$ bis $+\infty$; es ist

$$\log 0 = -\infty, \quad \log 1 = 0, \quad \log e = 1, \quad \log(+\infty) = +\infty.$$

Die Logarithmen der positiven ganzen Zahlen $k$ werden nach § 17 (Seite 96) durch folgende Formel als Grenzwerte von rationalen Zahlen dargestellt:

$$\log k = \lim \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{km}\right) \quad \text{für} \quad \lim m = \infty.^{*}$$

Den Differentialquotienten der Funktion $f(x)$, also des natürlichen Logarithmus von $x$, kennen wir bereits; für alle $x$ zwischen $0$ und $+\infty$ ist

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Daraus wird sofort der Differentialquotient des Logarithmus mit der Basis $a$ abgeleitet:

$$\frac{d\,{}^{a}\!\log x}{dx} = \frac{1}{x \log a} = \frac{{}^{a}\!\log e}{x}.$$

Auch die Exponentialfunktion $e^x$ lässt sich differentiieren. Wenn man $e^x$ mit $y$ bezeichnet, so kommt:

$$x = \log y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = y = e^x,$$

also für alle endlichen $x$:

$$\frac{d\,(e^x)}{dx} = e^x,$$

d. h. die Exponentialfunktion $e^x$ ist gleich ihrer Ableitung nach $x$. Für die allgemeine Exponentialfunktion

$$a^x = e^{x \log a}$$

ergiebt sich durch mittelbare Differentiation:

$$\frac{d\,(a^x)}{dx} = a^x \log a.$$

Dies sind die ersten transcendenten** Funktionen, die wir differentiieren lernen. Auf sie lässt sich unter anderen die von $x=0$ bis $x=+\infty$ giltige Funktion

$$x^n = e^{n \log x} \quad (n \text{ konstant}),$$

---

* Siehe unten § 25.

** Vergl. § 23.

d. i. die Potenz von $x$ mit beliebigem (endlichen) Exponenten, die für irrationale $n$ transcendent ist,* zurückführen. Wieder durch mittelbare Differentiation erhält man für alle $x$ zwischen 0 und $+\infty$:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1},$$

wie bei rationalem Exponenten. Dementsprechend gilt auch die Formel für die Integration von $x^n$ jetzt allgemein. Es ist bei beliebigem (endlichen) Exponenten $n$:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{wenn } n \text{ nicht } -1.$$

Zugleich besitzen wir jetzt die ergänzende Integralformel:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \quad \text{oder} \quad \log(-x) + C,$$

jenachdem $x$ positiv oder negativ; für positive $x$ ist

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x.$$

Fügt man noch

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

hinzu, so kann man mit Hilfe dieser Formeln eine ausgedehnte Anzahl von Funktionen integrieren.

## § 20. Quadratur und Rektifikation.

Die Ermittelung des Flächeninhaltes (Quadratur) von ebenen Figuren mit krummliniger Begrenzung und die Ermittelung der Länge (Rektifikation) einer ebenen Kurve aus der analytischen Darstellung der betreffenden Figuren sind Aufgaben der Integralrechnung. Mehrere Probleme dieser Art sind sehr alt und schon von Archimedes gelöst worden.

Wir beginnen mit der Berechnung des Inhalts einer ebenen Fläche, zu deren Begrenzung die krumme Linie $KL$ gehört. Dabei setzen wir rechtwinklige Koordinaten voraus; die Linie $KL$ wird so klein angenommen, dass keine Abscisse sich wiederholt, und dass die Abscissenaxe nirgends überschritten wird. Ist $(x, y)$ irgend

---

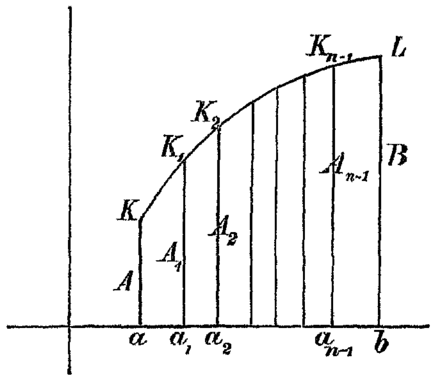
* Vergl. § 23.

ein Punkt der Linie $KL$, $(a, A)$ der Punkt $K$, $(b, B)$ der Punkt $L$, so wird $y$ als Funktion von $x$ aufgefasst, und das Intervall der Independenten erstreckt sich von $a$ bis $b$. Wir setzen:

$$y = f(x).$$

Diese Funktion ist eindeutig, endlich und stetig anzunehmen von $x = a$ bis $x = b$. Da die Abscissenaxe nirgend überschritten wird und mithin (§ 10 Seite 53) die Funktion ihr Zeichen nicht wechseln kann, so wollen wir annehmen, dass sie durchweg positiv ist, was sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems stets erreichen lässt. Endlich wird $a < b$ vorausgesetzt.

Fig. 35.




Aus der krummen Linie $KL$, den Ordinaten ihrer Endpunkte und dem durch sie herausgeschnittenen Teile der Abscissenaxe setzt sich die Begrenzung einer gewissen ebenen Fläche $F$ zusammen. Auf Flächen dieser Art kann man jede andere zurückführen; wir beschränken uns daher auf die Figur $F$ und fragen, was man unter ihrem Flächeninhalt zu verstehen habe.

Teilt man die Linie $KL$ etwa in $n$ Abschnitte durch die Punkte $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$, so sind die Teile $KK_1, K_1K_2, \ldots, K_{n-1}L$ im allgemeinen wieder krumme Linien. Die Erfahrung lehrt aber, dass bei lange genug fortgesetzter Zerlegung zuletzt die einzelnen Teile der krummen Linie von geraden Strecken nicht mehr unterschieden werden können. Stellen wir uns vor, dass dies bei obiger Einteilung erreicht ist. Man setzt alsdann an Stelle der krummen Linie $KL$ die gebrochene Linie $KK_1K_2 \ldots K_{n-1}L$, dementsprechend an Stelle der Fläche $F$ eine nur von geraden Strecken begrenzte. Der Inhalt der letzteren wird nach elementaren Vorschriften berechnet; ihn nennt man geradezu den Inhalt der Figur $F$. Indem wir jetzt die analytische Darstellung dieser Zahl untersuchen, wird sich zugleich zeigen, wie ihr allemal hinreichende Bestimmtheit innewohnt, trotz der bei ihrem Zustandekommen obwaltenden Willkür.

Es seien $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ die Abscissen, $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ die Ordinaten der Punkte $K_1 K_2 \ldots K_{n-1}$; die Ordinaten sind positiv. Ferner sei

$$a_1 - a = h_1, \quad a_2 - a_1 = h_2, \ \ldots, \ b - a_{n-1} = h_n;$$

auch diese Zahlen sind positiv. Jene geradlinig begrenzte Fläche zerfällt in $n$ Trapeze. Das erste derselben hat zwei parallele Seiten von der Länge $A$ resp. $A_1$ und eine zu diesen senkrechte Seite von der Länge $h_1$, also den Flächeninhalt

$$\tfrac{1}{2} h_1 (A + A_1),$$

u. s. f. Die Zahl, welche den Inhalt der Figur $F$ darstellen soll, ist demnach

$$\tfrac{1}{2} h_1 (A + A_1) + \tfrac{1}{2} h_2 (A_1 + A_2) + \ldots + \tfrac{1}{2} h_n (A_{n-1} + B) = \tfrac{1}{2} (w_1 + w_2);$$

hier sind

$$w_1 = A h_1 + A_1 h_2 + \ldots + A_{n-1} h_n, \quad w_2 = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + B h_n$$

besondere Werte des in § 17 eingeführten Ausdrucks

$$w = y_1 h_1 + y_2 h_2 + \ldots + y_n h_n,$$

in welchem die (positiven) Funktionswerte $y_1 y_2 \ldots y_n$ resp. aus dem ersten, zweiten, ..., $n^{\text{ten}}$ Abschnitt beliebig genommen werden können. Nennen wir wieder $h$ eine Variable, die beliebig kleine positive Werte annehmen kann, nur nicht die Null, und nehmen die Strecken $h_1 h_2 \ldots h_n$ kleiner als $h$, so nähert sich $w$ einem endlichen Grenzwert $\sigma$ für $\lim h = 0$, und es ist auch

$$\sigma = \lim w_1 = \lim w_2 = \lim \tfrac{1}{2} (w_1 + w_2) \quad \text{für} \quad \lim h = 0.$$

Wenn wir nun behufs Ermittelung der Fläche auf der Linie $KL$ noch weitere Punkte einschalten, so wird die Grösse $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ bei der rein analytischen Berechnung (im allgemeinen) Veränderungen erleiden. Da sie aber bei der empirischen Bestimmung durch die erforderlichen Abmessungen nicht mehr merklich verändert wird, so müssen jene Differenzen sich innerhalb der der Aufgabe angemessenen Fehlergrenze bewegen. Eine solche Differenz (positiv genommen) sei $\varepsilon$. Man nehme $h$ so klein, dass alle ihm entsprechenden Werte $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ von einander und von $\sigma$ sich um weniger als $\varepsilon$ unterscheiden. Dann kann man $\sigma$ für $\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ schreiben, d. h. es ist

$$\tfrac{1}{2} (w_1 + w_2) = \sigma \text{ mit erlaubtem Fehler.}$$

Hieraus fliesst die Berechtigung, wie es in der Analysis geschieht, den Grenzwert $\sigma$ den Flächeninhalt der Figur $F$ zu nennen. Nun war $\sigma$ das von $a$ bis $b$ erstreckte Integral von $y\,dx$; folglich ist unter den angegebenen Voraussetzungen *der Flächeninhalt der von* *der Linie KL, den Ordinaten ihrer Endpunkte und der Abscissenaxe begrenzten Figur gleich*

$$\int_a^b y\,dx,$$

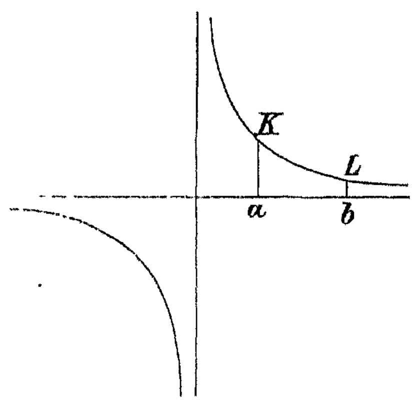
ein Resultat, das auch richtig bleibt, wenn $KL$ eine gerade Strecke oder eine gebrochene Linie ist. Man kann

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\,\eta$$

setzen; dann bedeutet $\eta$ eine besimmte zwischen der grössten und kleinsten liegende Ordinate und entspricht einer bestimmten Abscisse zwischen $a$ und $b$. Also ist jedenfalls $\sigma > 0$.

Weil hiernach die Integrale stetiger Funktionen als Flächenwerte gedeutet werden können, nennt man überhaupt Integrationen der Art, wie wir sie hier betrachten, Quadraturen im Gegensatz zu den anderen.

Fig. 36.




Wird der Bogen $KL$ beispielsweise auf der gleichseitigen Hyperbel

$$y = \frac{1}{x}$$

angenommen ($a$ und $b$ positiv), so ergiebt sich der Flächeninhalt gleich

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a$$
$$= \log \frac{b}{a}.$$

Ein anderes Beispiel bietet der um den Anfangspunkt $O$ mit dem Halbmesser 1 beschriebene Kreis

$$x^2 + y^2 = 1.$$

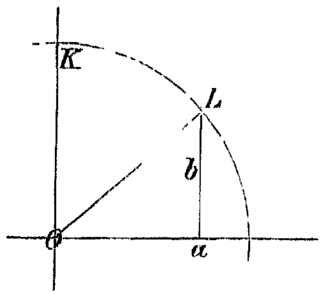
Wir nehmen $K$ auf dem Schenkel der positiven Ordinaten, also mit der Abscisse Null, $L$ mit positiven Koordinaten $a$, $b$. Dann variiert $x$ von 0 bis $a$, und

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ (positiv genommen)}$$

ist eine eindeutige, endliche und stetige Funktion von $x$ mit der Derivierten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y} = \frac{1}{x}\left(y - \frac{1}{y}\right).$$

Fig. 37.




Der zu bestimmende Flächeninhalt wird durch das Integral

$$\int_0^a dx\sqrt{1-x^2}$$

dargestellt. Subtrahiert man hiervon den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a$, $b$, so erhält man den Inhalt des Kreissektors $KOL$:

$$\int_0^a dx\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}ab.$$

Nun kommt bei teilweiser Integration (§ 18 Seite 107):

$$\int y\,dx = xy - \int x\frac{dy}{dx}\,dx = xy - \int\left(y - \frac{1}{y}\right)dx,$$

$$\int_0^a y\,dx = [xy]_0^a - \int_0^a y\,dx + \int_0^a \frac{dx}{y},$$

$$2\int_0^a y\,dx - ab = \int_0^a \frac{dx}{y},$$

$$\text{Sektor } KOL = \tfrac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{y} = \tfrac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

zunächst nur für $a < 1$, da auf der rechten Seite der vorletzten Formel die zu integrierende Funktion unendlich wird bei $a = 1$. Die linke Seite jener Formel ist aber eine stetige Funktion von $a$ auch bei $a = 1$, mithin strebt das rechts stehende Integral einem endlichen Grenzwerte zu für $\lim a = 1$, die obere Grenze 1 ist zulässig (§ 17 extr.) und ohne Einschränkung

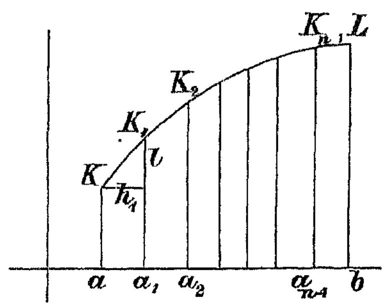
$$\int_0^a dx\sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wir wenden uns jetzt zur **Rektifikation** eines ebenen Kurvenbogens $KL$, indem wir wieder rechtwinklige Koordinaten einführen und voraussetzen, dass keine Abscisse sich wiederholt. Die Koordinaten $x$, $y$ des die Linie durchlaufenden Punktes sind von einander abhängig; es sei wieder $a$ die Abscisse von $K$, $b$ die von $L$, $a < b$ und

$$y = f(x);$$

$y$ ist eindeutig, endlich und stetig von $x = a$ bis $x = b$. Wir müssen ausserdem die Linie $KL$ so klein annehmen, dass in jedem Punkte eine bestimmte Tangente vorhanden ist (§ 16); die Richtung der Tangente verändert sich dann stetig von Punkt zu Punkt. Endlich müssen wir Tangenten ausschliessen, die auf der Abscissenaxe senkrecht stehen; dies erreicht man durch Vertauschung der Koordinatenaxen, nachdem man die Linie erforderlichenfalles in Teile zerlegt hat. Somit hat $y$ eine endliche und stetige Ableitung $y'$.

Fig. 38.




Auf der Linie $KL$ werden die Punkte $K_1 K_2 \ldots K_{n-1}$ wieder so eng eingeschaltet, dass die entstehenden $n$ Teile der krummen Linie von geraden Strecken nicht unterschieden werden können; aus den geraden Strecken $KK_1$, $K_1K_2$, …, $K_{n-1}L$ setzt sich eine gewisse Länge zusammen, diese nennt man die **Länge** des Bogens $KL$. Um eine analytische Darstellung der Länge zu erhalten, seien wieder $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ die Abscissen der eingeschalteten Punkte, also

$$a_1 - a = h_1, \quad a_2 - a_1 = h_2, \; \ldots, \; b - a_{n-1} = h_n$$

positiv; ausserdem sei

$$\text{abs}\,[f(a_1) - f(a)] = l.$$

Dann ist die gerade Strecke $KK_1$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $h_1$ und $l$ und hat daher die Länge

$$\sqrt{h_1^2 + l^2} = h_1 \sqrt{1 + \left(\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a}\right)^2},$$

wo die Wurzeln positiv zu nehmen sind. Es giebt aber (§ 15 Seite 83) zwischen $a$ und $a_1$ mindestens einen bestimmten Wert $\xi$ derart, dass

$$\frac{f(a_1) - f(a)}{a_1 - a} = f'(\xi).$$

Führen wir die positiv genommene Quadratwurzel

$$\sqrt{1 + y'y'} = u$$

ein, so ist auch $u$ eine eindeutige, endliche und stetige Funktion von $x$. Für $x = \xi$ sei $u = u_1$; dann ist obige Länge gleich

$$h_1 \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} = h_1 u_1.$$

Die Zahl, welche wir die Länge des Bogens $KL$ nannten, ist demnach eine Summe von solchen Produkten, etwa

$$u_1 h_1 + u_2 h_2 + \ldots + u_n h_n,$$

wo $u_1 u_2 \ldots u_n$ bestimmte Werte von $u$ resp. aus dem ersten, zweiten, ..., $n^{\text{ten}}$ Abschnitt sind. Wenn aber $h$ eine positive Veränderliche bedeutet und $h_1 h_2 \ldots h_n$ kleiner als $h$ genommen werden, so strebt die Summe einem endlichen Grenzwerte $\tau$ zu, wenn $h$ dem Grenzwerte Null zustrebt, und zwar ist

$$\tau = \int_a^b u\, dx.$$

Hieraus folgt durch denselben Gedankengang, wie bei der Quadratur, die Berechtigung, die Länge des Bogens $KL$ durch den Grenzwert $\tau$ darzustellen. *Unter den angegebenen Voraussetzungen ist also die Länge des Bogens KL gleich*

$$\tau = \int_a^b dx \sqrt{1 + y'y'}.$$

Man kann auch schreiben*

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{für} \quad \int dx \sqrt{1 + y'y'}.$$

Die Formel bleibt giltig, wenn $KL$ gerade ist.

Als Beispiel diene der in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung

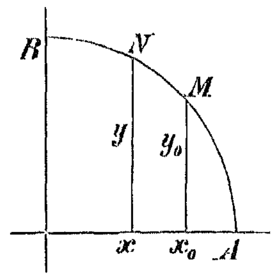
$$x^2 + y^2 = 1$$

dargestellte Kreis, der den Schenkel der positiven Abscissen in $A(1, 0)$, den der positiven Ordinaten in $B(0, 1)$ schneide. Wir

* Für $(dx)^n$ wird $dx^n$ geschrieben.

betrachten nur den Quadranten, der die Punkte mit positiven Koordinaten enthält. Ein beliebiger Punkt dieses Quadranten sei $N(x, y)$. Dann ist

Fig. 39.




$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ (positiv genommen)}$$

eine eindeutige, endliche und stetige Funktion der Abscisse von $x = 0$ bis $x = 1$. Der Differentialquotient von $y$ nach $x$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

ist durchweg stetig und für $x < 1$ auch endlich, aber für $x = 1$, d. h. im Punkte $A$, ist die Tangente senkrecht zur Abscissenaxe und $y' = \infty$. Um daher die Länge $z$ des Bogens $AN$ auszudrücken, nehmen wir einen Punkt $M(x_0, y_0)$ des Kreises zwischen $A$ und $N$ und erhalten zunächst die Länge $z_0$ des Bogens $MN$:

$$z_0 = \int_x^{x_0} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_x^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int_x^{x_0} \frac{dx}{y}.$$

Die Differenz $z - z_0$ bedeutet die Länge des Bogens $AM$; nun ist

$$x = \sqrt{1 - y^2} \text{ (positiv genommen)}$$

eine eindeutige, endliche und stetige Funktion der Ordinate von $y = 0$ bis $y = 1$, und der Differentialquotient von $x$ nach $y$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = -\frac{y}{x}$$

ist durchweg stetig und für $y < 1$ auch endlich; folglich hat man:

$$z - z_0 = \int_0^{y_0} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int_0^{y_0} \frac{dy}{x},$$

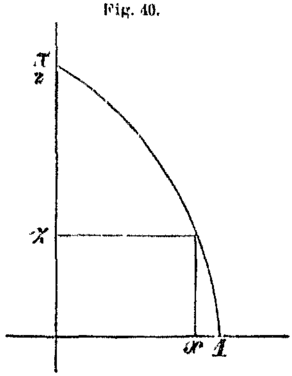
$$0 = \lim (z - z_0) \quad \text{für} \quad \lim y_0 = 0, \quad \text{d. i. für} \quad \lim x_0 = 1,$$

$$z = \lim z_0 \quad \text{für} \quad \lim x_0 = 1,$$

$$z = \int_x^1 \frac{dx}{y} = -\int_1^x \frac{dx}{y} = -\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Die Bogenlänge $z$ stellt sich als endliche und stetige Funktion der Abscisse dar von $x=0$ bis $x=1$; der Wert von $z$ bei $x=0$ ist die Länge des Bogens $AB$, des Quadranten. Nach Euler wird die Länge des Halbkreises vom Radius Eins, d. i. die Länge des Kreisumfanges vom Durchmesser Eins, mit $\pi$ bezeichnet.* Hiernach wird $z=\frac{1}{2}\pi$ bei $x=0$ und

Fig. 40.




$$\frac{\pi}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^x\frac{dx}{y}+\int_x^1\frac{dx}{y}=z+\int_0^x\frac{dx}{y},\quad z=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Man kann $z$ nach $x$ differentiieren, und zwar ist zunächst nur für $x<1$:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

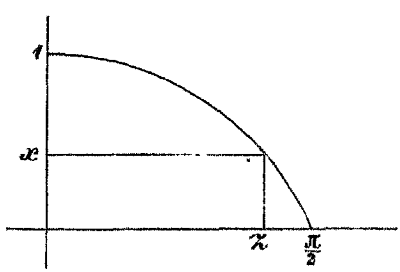
folglich nach dem Fundamentalsatze in § 15:

$$\frac{z-0}{x-1}=-\frac{1}{\eta},\quad \text{wo}\quad 0<\eta<y,$$

$$\lim\frac{z-0}{x-1}=-\lim\frac{1}{\eta}=-\infty\quad \text{für}\quad \lim x=1,$$

so dass $z$ auch bei $x=1$ differentiierbar ist; die Ableitung von $z$ nach $x$ ist durchweg negativ, $z$ fortwährend im Abnehmen. Wird also das Abhängigkeitsverhältnis umgekehrt, so erscheint $x$ als eine eindeutige, endliche, stetige und fortwährend abnehmende Funktion von $z$, im Intervall von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}\pi$, mit der Ableitung

Fig. 41.

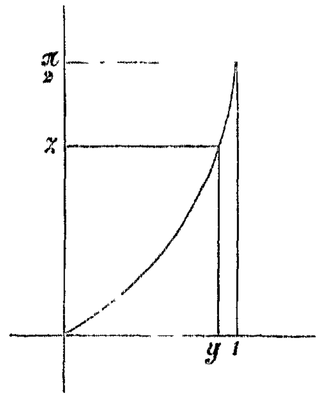



$$\frac{dx}{dz}=-y=-\sqrt{1-x^2}.$$

* Vergl. unten § 27.

Die Variable $z$ kann auch als Funktion der Ordinate $y$ aufgefasst werden. Es ist

Fig. 42




$$z = \int\limits_0^y \frac{dy}{x} = \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

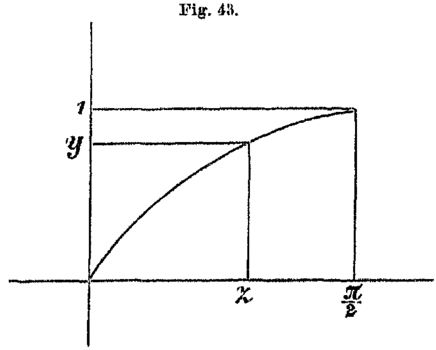
endlich und stetig von $y=0$ bis $y=1$; bei $y=1$ wird $z = \frac{1}{2}\pi$. Der Differentialquotient

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

ist negativ, $z$ überall im Zunehmen; mithin ergiebt sich auch $y$ als eindeutige, endliche, stetige und fortwährend wachsende Funktion von $z$, im Intervall von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}\pi$, mit der Ableitung

$$\frac{dy}{dz} = x = \sqrt{1-y^2}.$$

Fig. 43.




## § 21. Die trigonometrischen Funktionen.

Sowohl die Quadratur als auch die Rektifikation des Kreises haben uns zu dem Integrale

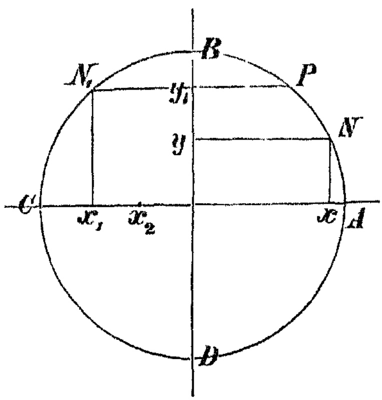
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

geführt, welches jetzt vollständiger diskutiert werden soll. Indem wir wieder zwei auf einander senkrechte Durchmesser des Kreises zu Koordinatenaxen und seinen Halbmesser zur Längeneinheit wählen, erhalten wir für den Kreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

und bezeichnen auf ihm die Punkte $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ resp. mit $A$, $B$, $C$ und $D$. Für jeden Punkt $N(x, y)$ des Kreises ist

Fig 11




$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad x = \sqrt{1-y^2},$$

aber die Wurzeln sind nicht immer positiv zu nehmen. Die Punkte, deren beide Koordinaten positiv sind, erfüllen den Quadranten $AB$; zur Messung der Bogen auf diesem Quadranten dient die im vorigen Paragraphen mit $z$ bezeichnete Variable, welche dort in ihrer Abhängigkeit sowohl von der Abscisse $x$ als auch von der Ordinate $y$ betrachtet wurde; beide Abhängigkeitsverhältnisse liessen sich umkehren und jedesmal eine Differentialformel aufstellen.

In jedem der drei übrigen Quadranten kann eine ganz analoge Betrachtung durchgeführt werden. Fassen wir aber jetzt einen Bogen auf, der nicht ganz in einem Quadranten liegt. Wird etwa $N(x, y)$ im Quadranten $AB$, $N_1(x_1, y_1)$ im Quadranten $BC$ angenommen, also $x$, $y$, $y_1$ positiv, $x_1$ negativ, so wird zwar die Länge des Bogens $N_1BN$ durch die Abscissen seiner Endpunkte ausgedrückt mittels des Integrales

$$\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\sqrt{1-x^2} \text{ positiv}).$$

Aber durch die Ordinaten seiner Endpunkte lässt sie sich nicht in entsprechender Integralform

$$\pm \int_{y_1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

darstellen. Dieses Integral vielmehr bedeutet nur die Länge des Bogens $PN$, wenn $P$ derjenige Punkt des Kreises ist, welcher die positiven Koordinaten $-x_1$, $y_1$ besitzt. Einen Bogen endlich, der sich vom Quadranten $AB$ bis in den Quadranten $CD$ erstreckt, werden wir in keiner Weise als ein einziges Integral schreiben können, so lange wir bei der bisherigen Auffassung des bestimmten Integrales stehen bleiben.

Um diese Auffassung in geeigneter Weise auszudehnen, werden folgende Festsetzungen getroffen, wobei $x_1$ und $x_2$ Werte aus dem Intervall $(-1\ldots 1)$ bedeuten. Die Funktion $y$ der Variablen $x$ besteht aus zwei bei $x=1$ und $x=-1$ zusammenhängenden Zweigen, von denen der eine die positiven, der andere die negativen Werte umfasst. In den bisherigen Integralen waren die während der Integration vorkommenden Werte von $y$ aus einem Zweige zu entnehmen, welcher jedesmal besonders kenntlich gemacht werden musste. Statt

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{y}$$

wollen wir nun schreiben:

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{auf dem Wege } (\overset{+}{x_1}\ldots\overset{+}{x_2}),$$

beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{auf dem Wege } (\overset{-}{x_1}\ldots\overset{-}{x_2}),$$

jenachdem die $y$ positiv oder negativ verlangt sind. Statt

$$\int_{x_1}^{1} \frac{dx}{y} \ (\text{mit positiven } y) + \int_{1}^{x_2} \frac{dx}{y} \ (\text{mit negativen } y)$$

schreiben wir:

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{auf dem Wege } (\overset{+}{x_1}\ldots\overset{+}{1},\ \overset{-}{1}\ldots\overset{-}{x_2}).$$

Statt

$$\int_{x_1}^{1} \frac{dx}{y} \ (\text{mit positiven } y) + \int_{1}^{-1} \frac{dx}{y} \ (\text{mit negativen } y)$$
$$+ \int_{-1}^{x_2} \frac{dx}{y} \ (\text{mit positiven } y)$$

schreiben wir:

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{auf dem Wege } (\overset{+}{x_1}\ldots\overset{+}{1},\ \overset{-}{1}\ldots\overset{-}{-1},\ \overset{+}{-1}\ldots\overset{+}{x_2})$$

u. s. w. Die Variable $x$ kann also, wenn sie in einem Endpunkte ihres Intervalles anlangt, wieder umkehren, dabei geht aber $y$ in den anderen Zweig über. Es ist beispielsweise

$$\int \frac{dx}{y} \text{ auf dem Wege } \left(\overset{+}{0} \ldots \overset{+}{1}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{dx}{y} \text{ auf dem Wege } \left(\overset{-}{1} \ldots \overset{-}{-1}\right) = \pi.$$

Die erste Abscisse des Integrationsweges soll wieder die untere Grenze, die letzte die obere Grenze genannt werden.

Das Integral ist jetzt durch die beiden Grenzen nicht mehr eindeutig bestimmt. Wenn man trotzdem auch jetzt noch ein von $x_1$ bis $x_2$ erstrecktes Integral durch

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{y}$$

darstellt, so erhält dieses Zeichen erst durch Angabe des zwischen $x_1$ und $x_2$ zurückzulegenden Integrationsweges einen völlig bestimmten Sinn. Die Wahl des Weges wird wenigstens zum Teil beschränkt, wenn man kenntlich macht, welchem Zweige die ersten und welchem Zweige die letzten Werte von $y$ angehören sollen. Ist etwa der unteren Grenze $x_1$ der positive Wert $y_1$, der oberen Grenze $x_2$ der negative Wert $y_2$ zuzuordnen, so kann man schreiben:

$$\int_{\overset{+}{x_1}}^{\overset{-}{x_2}} \frac{dx}{y} \quad \text{oder} \quad \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \frac{dx}{y}.$$

Wird auf kürzestem Wege integriert, so sind die Integrale

$$\int_{1,0}^{x,y} \frac{dx}{y}, \quad \int_{0,1}^{x_1,y_1} \frac{dx}{y}, \quad \int_{-1,0}^{x_2,y_2} \frac{dx}{y}, \quad \int_{0,-1}^{x_3,y_3} \frac{dx}{y}$$

negativ, wenn die Punkte $(x, y)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ resp. dem Quadranten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ angehören.

Wir definieren nun, im Einklang mit der Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen, durch die Gleichung

$$-\int_{1,0}^{x,y} \frac{dx}{y} = z$$

eine Variable $z$, welche nicht bloss von dem Wertepaare $(x, y)$ abhängt, sondern auch vom Integrationswege. Den Weg nennen wir positiv oder negativ, jenachdem die $y$ auf seinem ersten Abschnitte positiv oder negativ sind. Im ersten Falle ist $z$ positiv, und zwar wird, indem man von $z$ möglichst viele Quadranten absondert:

$$z = -\int_{1,0}^{0,1} \frac{dx}{y} - \int_{0,1}^{-1,0} \frac{dx}{y} - \int_{-1,0}^{0,-1} \frac{dx}{y} - \ldots + \zeta = m\frac{\pi}{2} + \zeta,$$

wo die positive Grösse $\zeta$ eine der Formen

$$-\int_{1,0}^{x,y} \frac{dx}{y}, \quad -\int_{0,1}^{x,y} \frac{dx}{y}, \quad -\int_{-1,0}^{x,y} \frac{dx}{y}, \quad -\int_{0,-1}^{x,y} \frac{dx}{y}$$

besitzt, $m$ jede positive ganze Zahl oder die Null bedeuten kann und alle Integrationen auf dem kürzesten Wege auszuführen sind. Den vier Formen, welche $\zeta$ besitzen kann, entsprechen die vier Formen von $m$:

$$4h, \quad 4h+1, \quad 4h+2, \quad 4h+3,$$

wo $h$ eine ganze Zahl vorstellt. Wird $m$ festgehalten, so kann der Punkt $(x, y)$ nur in einem der vier Quadranten variieren. Dabei durchläuft $\zeta$ alle Werte von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, folglich $z$ alle Werte von $\frac{1}{2}m\pi$ bis $\frac{1}{2}(m+1)\pi$; $\zeta$ ist differentiierbar nach $x$ und nach $y$, ebenso $z$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{1}{y}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{d\zeta}{dy} = \frac{1}{x};$$

zugleich werden $x$ und $y$ Funktionen von $\zeta$, also auch von $z$, mit den Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{d\zeta} = -y, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\zeta} = x.$$

Hiernach durchläuft $z$, wenn man alle positiven Integrationswege in Betracht zieht, die Reihe aller endlichen positiven Zahlen; zu jeder dieser Zahlen erhält man, indem man sie auf die Form

$$m\frac{\pi}{2} + \zeta, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \zeta < \frac{\pi}{2}, \quad m \text{ positive ganze Zahl oder Null,}$$

bringt, einen bestimmten Wert von $x$ und einen bestimmten Wert von $y$. Zieht man schliesslich noch die negativen Wege in Betracht, so treten als Werte von $z$ alle endlichen negativen Zahlen auf. Zu jeder endlichen Zahl $z$ gehört demnach ein und nur ein Wertepaar $(x, y)$ derart, dass

$$-\int_{1,0}^{x,y} \frac{dx}{y} = z$$

herauskommt, und zwar ist auch der Integrationsweg völlig bestimmt.

Die so definierten eindeutigen Funktionen $x$ und $y$ der Variablen $z$ führen die Namen Cosinus und Sinus der Zahl $z$. Man schreibt:

$$x = \cos z, \quad y = \sin z.$$

Es sind $x$ und $y$ die Koordinaten des Kreispunktes, der erreicht wird, wenn man von $A$ aus auf dem Kreise in der dem Zeichen von $z$ entsprechenden Richtung die durch den absoluten Wert von $z$ dargestellte Anzahl von Längeneinheiten zurücklegt; dem positiven Zeichen entspricht die Richtung $ABCD$, dem negativen die Richtung $ADCB$. Man nennt deshalb das Argument jener beiden Funktionen auch den Bogen oder Arcus; sein Intervall umfasst alle endlichen Zahlen. Beide Funktionen sind überall endlich, stetig und differentiierbar. Aus

$$\frac{dx}{dz} = -y, \quad \frac{dy}{dz} = x$$

folgt jetzt:

$$\frac{d\cos z}{dz} = -\sin z, \quad \frac{d\sin z}{dz} = \cos z.$$

Wir notieren die besonderen Werte:

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Um die Eigenschaften des Cosinus und des Sinus aus der hier zu Grunde gelegten, rein analytischen Definition zu erschliessen, verstehen wir unter $\alpha$ eine Konstante und bilden:

$$\frac{d\cos(z+\alpha)}{dz} = -\sin(z+\alpha), \quad \frac{d\sin(z+\alpha)}{dz} = \cos(z+\alpha).$$

Daraus ergiebt sich:

$$\cos z \,.\, d\cos(z+\alpha) + \sin(z+\alpha) \,.\, d\sin z = 0,$$
$$\cos(z+\alpha) \,.\, d\cos z + \sin z \,.\, d\sin(z+\alpha) = 0,$$
$$\sin z \,.\, d\cos(z+\alpha) - \sin(z+\alpha) \,.\, d\cos z = 0,$$
$$\cos(z+\alpha) \,.\, d\sin z - \cos z \,.\, d\sin(z+\alpha) = 0,$$

und weiter

$$d[\cos z \cos(z+\alpha) + \sin z \sin(z+\alpha)] = 0,$$
$$d[\cos z \sin(z+\alpha) - \sin z \cos(z+\alpha)] = 0,$$

d. h. die eindeutigen Funktionen von $z$:

$$\cos z \cos (z + \alpha) + \sin z \sin (z + \alpha),$$
$$\cos z \sin (z + \alpha) - \sin z \cos (z + \alpha)$$

reducieren sich auf Konstanten. Indem man $z = 0$ einträgt, erhält man die Werte dieser Konstanten, und zwar wird für alle Werte von $z$ und $\alpha$:

$$\cos z \cos (z + \alpha) + \sin z \sin (z + \alpha) = \cos \alpha,$$
$$\cos z \sin (z + \alpha) - \sin z \cos (z + \alpha) = \sin \alpha.$$

Die Annahme $\alpha = -z$ lehrt, dass

$$\cos (-z) = \cos z, \quad \sin (-z) = -\sin z,$$

d. h. *der Cosinus ist eine gerade, der Sinus eine ungerade Funktion.* Weiter liefert die Annahme $z = a$, $\alpha = -a - b$ mit beliebigen $a$ und $b$ die Formeln:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

mithin für $b = -a$:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$

für $b = \pm \frac{1}{2}\pi$:

$$\sin a = \cos \left(\frac{\pi}{2} - a\right), \quad \cos a = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a\right),$$
$$\cos \left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a, \quad \sin \left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a,$$

und daraus entwickelt man endlich:

$$\cos (\pi - a) \quad = -\cos a, \quad \sin (\pi - a) \quad = \sin a,$$
$$\cos (a + \pi) \quad = -\cos a, \quad \sin (a + \pi) \quad = -\sin a,$$
$$\cos (a + 2\pi) = \cos a, \qquad \sin (a + 2\pi) = \sin a.$$

Durch Verbindung der im vorigen Paragraphen für das Intervall von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gegebenen Beschreibung mit den Formeln

$$\cos (-x) = \cos x, \quad \cos (x + \pi) = -\cos x, \quad \cos (x + 2\pi) = \cos x$$

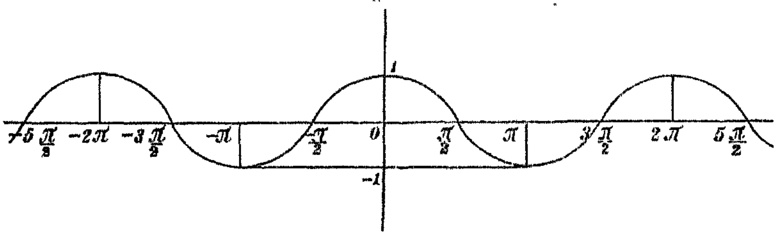
wird jetzt der Verlauf der Funktion

$$y = \cos x$$

erkannt, wie er in der umstehenden Figur veranschaulicht ist. Variiert $x$ von 0 bis $\pi$, so durchläuft $y$ beständig abnehmend die Werte von 1 bis $-1$, um dann, wenn $x$ weiter von $\pi$ bis $2\pi$ variiert, beständig wachsend die Werte von $-1$ bis 1 wieder zu durchlaufen. Indem man zu jedem $y$ aus dem Intervall $(-1 \ldots 1)$ den Wert von $x$ das eine Mal aus den Zahlen von $\pi$ bis 0, das andere

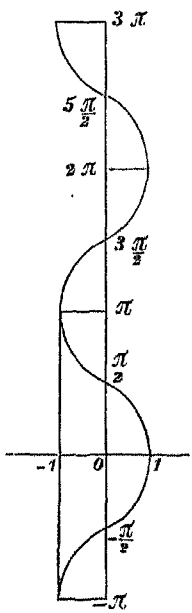
Mal aus den Zahlen von $\pi$ bis $2\pi$ entnimmt, bringt man zwei Zweige der inversen Funktion zu stande, welche bei $y = 1$ zu-

Fig. 45.




sammenhängen. Setzt $x$ seine Veränderungen fort von 0 bis $-2\pi$, von $2\pi$ bis $4\pi$, von $-2\pi$ bis $-4\pi$ u. s. w., so wiederholen sich die im Intervall $(0\ldots 2\pi)$ beobachteten Erscheinungen, weshalb der Cosinus eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi$ genannt wird, und zugleich werden fortwährend neue Zweige der inversen Funktion erzeugt.

Fig. 46.




Die inverse Funktion des Cosinus wird der Arcus-Cosinus genannt. Setzt man

$$y = \arccos x,$$

so ist die Independente $x$ auf das Intervall von $-1$ bis 1 beschränkt, und $y$ stellt daselbst eine unendlichvieldeutige Funktion von $x$ dar. Wird zu gegebenem $x$ der Wert $y_0$ aus irgend einem Zweige entnommen, so sind sämtliche Werte des $\arccos x$:

$$\left.\begin{matrix} y_0, & y_0 \pm 2\pi, & y_0 \pm 4\pi, & \ldots \\ -y_0, & -y_0 \pm 2\pi, & -y_0 \pm 4\pi, & \ldots \end{matrix}\right\}.$$

In jedem Zweige ist $y$ endlich, stetig und differentiierbar. Aus

$$x = \cos y, \quad \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - x^2}$$

folgt:

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sin \arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Auch der Sinus ist für die Bogen von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ im vorigen Paragraphen diskutiert worden. Der Verlauf der Funktion

$$y = \sin x$$

lässt sich daher für alle endlichen $x$ angeben, indem man die Relationen

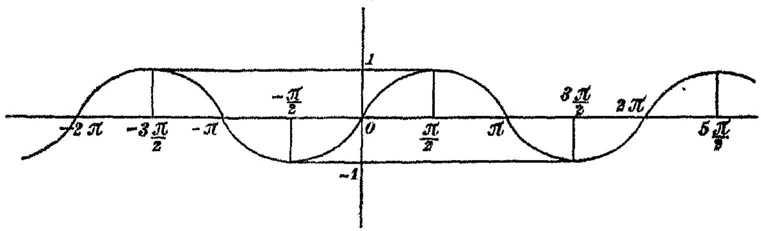
$$\sin(-x) = \sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin(\pi - x) = \sin x$$

benutzt. Man kann aber einfach den Sinus auf den Cosinus durch die Formel

$$\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

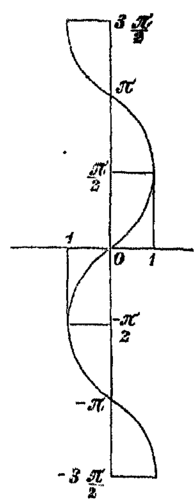
zurückführen. Auch der Sinus ist eine um $2\pi$ periodische Funktion. Während $x$ von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$ variiert, wächst $y$ von $-1$ bis $1$;

Fig. 47.




während $x$ von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ variiert, nimmt $y$ ab von 1 bis $-1$. Folglich gehört zu jedem $y$ aus dem Intervall $(-1 \ldots 1)$ ein Wert von $x$ aus der Folge $(-\frac{1}{2}\pi \ldots \frac{1}{2}\pi)$ und ein Wert von $x$ aus der Folge $(\frac{3}{2}\pi \ldots \frac{1}{2}\pi)$. An die beiden so entstehenden Zweige der inversen Funktion schliessen sich nach beiden Seiten unendlich viele andere an.

Fig. 48.




Die inverse Funktion des Sinus wird der Arcus-Sinus genannt. Ist jetzt

$$y = \arcsin x,$$

so ist die Independente $x$ wieder auf das Intervall $(-1 \ldots 1)$ beschränkt, $y$ eine unendlichvieldeutige Funktion von $x$, in jedem Zweige endlich, stetig und differentiierbar. Ist $y_0$ ein zu gegebenem $x$ gehöriger Funktionswert, so sind diesmal sämtliche Werte:

$$\left.\begin{array}{lll} y_0, & y_0 \pm 2\pi, & y_0 \pm 4\pi, \ldots \\ -y_0 \pm \pi, & -y_0 \pm 3\pi, & -y_0 \pm 5\pi, \ldots \end{array}\right\}.$$

Aus dem zwischen den Funktionen Arcus-Cosinus und Arcus-Sinus bestehenden Zusammenhange

$$\arcsin x = \frac{1}{2}\pi - \arccos x$$

oder aus den Gleichungen

$$x = \sin y, \quad \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$$

schliesst man:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Für die Tangente und Cotangente einer Zahl (eines Bogens) $x$, welche durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

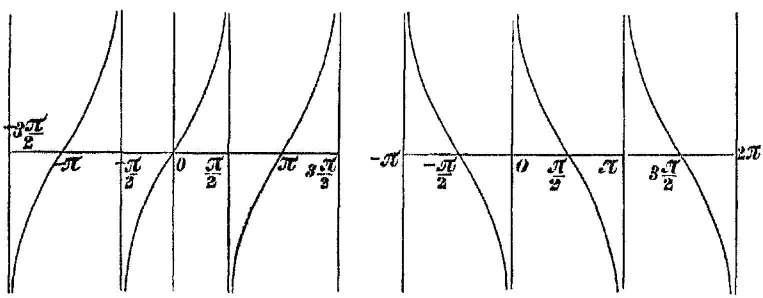
definiert werden, gelten die Formeln:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x},$$

$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Beide Funktionen sind eindeutig und stetig, überdies ungerade und periodisch; die Periode ist $\pi$. Variiert $x$ von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, so

Fig. 49.




durchläuft die Tangente von $x$ beständig wachsend die Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ und besitzt, wo sie endlich ist, das Differential

$$d \operatorname{tg} x = \frac{\cos x \, . \, d \sin x - \sin x \, . \, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x \, dx + \sin^2 x \, dx}{\cos^2 x}$$

und die Ableitung

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dieser Verlauf wiederholt sich in den Abschnitten von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$, von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $-\frac{3}{2}\pi$ u. s. w. Die Cotangente durchläuft in jedem der Abschnitte von $0$ bis $\pi$, von $0$ bis $-\pi$, von $\pi$ bis $2\pi$ u. s. w. beständig abnehmend die Zahlen von $+\infty$ bis $-\infty$ und besitzt, wo sie endlich ist, das Differential

$$d \operatorname{cotg} x = d \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

mithin die Ableitung

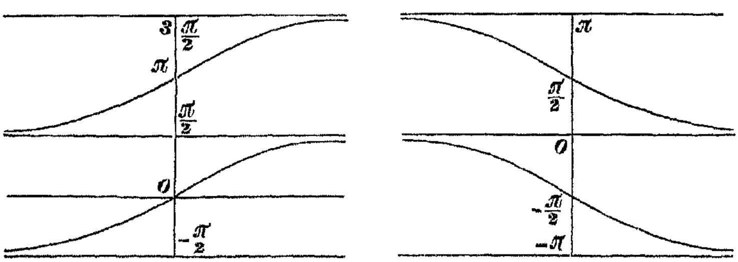
$$\frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Durch Umkehrung entstehen die unendlichvieldeutigen Funktionen Arcus-Tangens und Arcus-Cotangens, verknüpft durch die Beziehung:

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Ihr Argument nimmt alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ an. In den einzelnen Zweigen variiert $\operatorname{arctg} x$ stetig von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, von

Fig. 50.




$\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$, von $-\frac{3}{2}\pi$ bis $-\frac{1}{2}\pi$ u. s. w. und besitzt für alle endlichen $x$ die Ableitung

$$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \cos^2 \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Endlich variiert $\operatorname{arccotg} x$ in den einzelnen Zweigen stetig von $\pi$ bis 0, von 0 bis $-\pi$, von $2\pi$ bis $\pi$ u. s. w. und besitzt für alle endlichen $x$ die Derivierte:

$$\frac{d \operatorname{arccotg} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ist $y_0$ ein zu gegebenem $x$ gehöriger Wert des $\operatorname{arctg} x$ oder des $\operatorname{arccotg} x$, so sind

$$y_0, \quad y_0 \pm \pi, \quad y_0 \pm 2\pi, \ldots$$

sämtliche Werte der Funktion.

Hiermit ist die Beschreibung und die Differentiation der trigonometrischen (goniometrischen, cyklometrischen) oder Kreisfunktionen zum Abschluss gebracht.* Aus den obigen Differentialformeln gewinnen wir folgende Integrale:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C_1 \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = -\arccos x + C_1 \end{aligned}\right\} C_1 = C + \frac{\pi}{2}.$$

Bei dem vorletzten Integral ist es gleichgiltig, welchen Zweig des $\operatorname{arctg} x$ oder $\operatorname{arccotg} x$ man wählt. Bei dem letzten Integral dagegen kommt das Vorzeichen der Quadratwurzel in Betracht, man muss den Zweig so wählen, dass

$$\cos \arcsin x = \sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}.$$

Durch den Sinus und das Zeichen des Cosinus, oder den Cosinus und das Zeichen des Sinus, ist der Bogen bis auf Vielfache von $2\pi$ bestimmt.

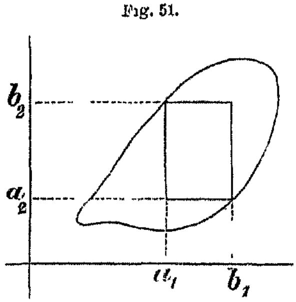
## § 22. Partielle Ableitungen.

Indem wir jetzt zu Funktionen mehrerer Variablen übergehen, nehmen wir zuerst eine Funktion von zwei Argumenten $x$ und $y$:

$$z = f(x, y).$$

Nicht immer ist es erlaubt, den Argumenten alle Werte beizulegen; die zulässigen Wertkombinationen bilden das Gebiet des veränderlichen Paares $xy$ und können unter Annahme rechtwinkliger Koordinaten durch Punkte einer Ebene veranschaulicht werden. Wir setzen voraus, dass das Gebiet des Punktes $(x, y)$ durch ein jener Ebene angehöriges Flächenstück (welches die ganze Ebene bedecken darf) repräsentiert wird, so dass der Punkt $(x, y)$ sich überall kontinuierlich bewegen kann. Indem man nötigen-

Fig. 51.




* Der Beweis, dass alle trigonometrischen Funktionen transcendent sind, folgt in § 23.

falls von den am Rande gelegenen Punkten teilweise oder ganz absieht, kann man jeden Punkt des Gebietes zur Ecke eines Rechtecks machen, dessen Seiten den Koordinatenaxen parallel laufen, und welches nur Punkte des Gebietes umfasst. Auf ein solches Rechteck werden wir uns beschränken, d. h. wir lassen $x$ ein Intervall endlicher Werte $(a_1 \dots b_1)$ und $y$ ein Intervall endlicher Werte $(a_2 \dots b_2)$ jedesmal mit Einschluss der Grenzen durchlaufen, ohne irgend eine Kombination dieser Werte auszuschliessen.

Solange man einen bestimmten Wert von $y$ festhält, ist $z$ als eine Funktion der stetigen Variablen $x$ allein zu betrachten. Nimmt man alsdann $x$ in seinem Intervall beliebig, so entsteht die Frage, ob daselbst ein Differentialquotient von $z$ in Bezug auf $x$ existiert. Ist ein solcher vorhanden, so wird er der partielle Differentialquotient von $z$ in Bezug auf $x$ genannt und mit

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

bezeichnet. Ferner schreibt man (Cauchy, Résumé des leçons etc. p. 31):

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z$$

und nennt dieses Produkt das partielle Differential von $z$ in Bezug auf $x$. Wenn in einem Gebiete der Variablen $xy$ überall ein partieller Differentialquotient von $z$ in Bezug auf $x$ existiert, so ist derselbe in jenem Gebiete als eine Funktion von $x$ und $y$ zu betrachten, welche die partielle Ableitung von $z$ in Bezug auf $x$ genannt wird. Man schreibt alsdann:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \text{oder auch} \quad f'(x).$$

Unter den entsprechenden Umständen giebt es einen partiellen Differentialquotienten von $z$ in Bezug auf $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial y},$$

ein partielles Differential von $z$ in Bezug auf $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z$$

und eine partielle Ableitung von $z$ in Bezug auf $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y), \quad \text{oder auch} \quad f'(y).$$

Im Gegensatz zu den partiellen Differentialquotienten oder Ableitungen spricht man auch von **gewöhnlichen**.

Wir nehmen jetzt an, *dass $z$ in dem betrachteten Gebiete überall nach $x$ und nach $y$ differentiiert werden kann, und dass die beiden partiellen Ableitungen*, für welche wir besondere Bezeichnungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = \psi(x, y)$$

einführen, *sich zwischen endlichen Grenzen bewegen.* Gehört auch der Punkt $(x_1, y_1)$ zum Gebiete und setzt man

$$x_1 - x = \Delta x = h, \; y_1 - y = \Delta y = k, \; f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta z,$$

so sind $\Delta x$ und $\Delta y$ Incremente der beiden Independenten, $\Delta z$ das entsprechende Increment der Funktion, und man hat:

$$f(x+h, y) - f(x, y) = h\varphi(\xi, y),$$
$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) = k\psi(x+h, \eta),$$

wo $\xi$ zwischen $x$ und $x+h$, $\eta$ zwischen $y$ und $y+k$ liegt, folglich:

$$\Delta z = h\varphi(\xi, y) + k\psi(x+h, \eta) = p\,\Delta x + q\,\Delta y + \omega,$$

indem man einführt:

$$\omega_1 = \varphi(\xi, y) - \varphi(x, y), \; \omega_2 = \psi(x+h, \eta) - \psi(x, y), \; \omega = \omega_1 \Delta x + \omega_2 \Delta y.$$

*Mithin ist $z$ eine durchweg stetige Funktion von $x$ und $y$.* Machen wir aber noch die Voraussetzung, *dass ihre beiden partiellen Ableitungen an der betrachteten Stelle stetig sind,* so lässt sich, wie klein auch die positive Zahl $\varepsilon$ vorgeschrieben werden mag, die positive Zahl $\delta$ so klein angeben, dass

$$\operatorname{abs} \Delta p < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \operatorname{abs} \Delta q < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sobald } \operatorname{abs} \Delta x < \delta \text{ und } \operatorname{abs} \Delta y < \delta.$$

Nimmt man dann $\operatorname{abs} \Delta x < \delta$ und $\operatorname{abs} \Delta y < \delta$, so wird

$$\operatorname{abs} \omega_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \operatorname{abs} \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \operatorname{abs} \omega < \delta\varepsilon, \quad \operatorname{abs} \frac{\omega}{\delta} < \varepsilon,$$

d. h. es wird die Differenz

$$\Delta z = p\,\Delta x + q\,\Delta y \text{ mit einem Fehler,}$$

der im Verhältnis zu $\delta$ beliebig klein gemacht werden kann. Incremente der beiden Independenten, welche in Rücksicht auf die vorgeschriebene Grösse von $\varepsilon$ dem Betrage nach hinreichend klein sind, heissen wieder Differentiale und werden mit $dx$ und $dy$ bezeichnet. Das entsprechende Increment der Funktion ist mit der vorhin bezeichneten Annäherung gleich $p\,dx + q\,dy$, einer homogenen linearen

Funktion von $dx$ und $dy$. Diese nennt man das totale (vollständige, exakte) Differential von $z$ in Bezug auf $x$ und $y$ und schreibt:

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

*Das totale Differential ist die Summe der partiellen Differentiale.* Die Bedeutung des Totaldifferentials mag man sich auf folgende Weise veranschaulichen (vergl. § 13 Seite 72). Da

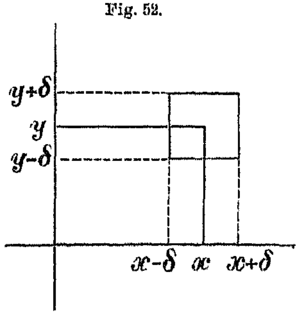
$$0 = \lim \left(\frac{\Delta z}{\delta} - p\,\frac{\Delta x}{\delta} - q\,\frac{\Delta y}{\delta}\right) \quad \text{für} \quad \lim \delta = 0,$$

so ist bei geeigneter Wahl von $\delta$:

$$\frac{\Delta z}{\delta} = p\,\frac{dx}{\delta} + q\,\frac{dy}{\delta} = \frac{dz}{\delta} \quad \text{mit einem Fehler} < \varepsilon,$$

d. h. wenn man für die beiden Independenten nur die Intervalle von $x - \delta$ bis $x + \delta$, resp. von $y - \delta$ bis $y + \delta$ in Betracht zieht und die Veränderungen von $x, y, z$ im Verhältnis von $\delta : 1$ vergrössert, so wird das Increment der Funktion durch ihr Differential mit beliebiger Genauigkeit dargestellt.

Fig. 52.




Das Vorstehende wird leicht auf beliebig viele Argumente ausgedehnt. *Die Regeln zur Bildung der Differentiale von Summen, Differenzen, Produkten, Potenzen und Quotienten bleiben giltig.* Als Beispiel einer Funktion von zwei Independenten $x$ und $y$ diene

$$z = x^y,$$

wo $x$ alle endlichen positiven Zahlen, $y$ alle endlichen Zahlen durchläuft. Da

$$x^y = e^{y \log x},$$

so ist $z$ überall endlich und stetig (vergl. § 10 Seite 54 flg., § 12 Seite 65). Hier existieren überall die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\,x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \log x,$$

welche wieder endlich und stetig sind, mithin auch das Totaldifferential

$$dz = y\,x^{y-1}\,dx + x^y \log x\,dy.$$

Wenn die Funktion $f(x)$ endlich und stetig ist im Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ und man nimmt $a$, $b$ aus diesem Intervall, so ist das bestimmte Integral

$$u = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

eine überall endliche und stetige Funktion seiner beiden Grenzen mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial b} = f(b), \quad \frac{\partial u}{\partial a} = -f(a)$$

und dem Totaldifferential

$$du = -f(a)\,da + f(b)\,db.$$

Kehren wir wieder zu der oben mit $z$ bezeichneten Funktion zurück. Indem wir annehmen, dass $z$ durchweg endlich und stetig ist und dass die Zahlen $a, b$ dem Intervall von $x$ angehören, setzen wir

$$u = \int_a^b z\,dx = \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Die hierdurch definierte Funktion $u$ der drei Variablen $a$, $b$, $y$ mit den Intervallen resp. $(a_1 \ldots b_1)$, $(a_1 \ldots b_1)$, $(a_2 \ldots b_2)$ ist ebenfalls durchweg endlich und stetig. Um die Stetigkeit zu beweisen, bildet man die Differenz

$$\begin{aligned}
\varDelta u &= \int_{a+\varDelta a}^{b+\varDelta b} f(x, y+\varDelta y)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx \\
&= \int_{a+\varDelta a}^{a} f(x, y+\varDelta y)\,dx + \int_b^{b+\varDelta b} f(x, y+\varDelta y)\,dx + \int_a^b [f(x, y+\varDelta y) - f(x, y)]\,dx \\
&= \eta_1 \varDelta a + \eta_2 \varDelta b + \eta_3 (b-a),
\end{aligned}$$

wo $\eta_1$ und $\eta_2$ bestimmte Werte von $z$, $\eta_3$ einen bestimmten Wert von $\varDelta z$ bedeutet. Die obere Grenze von abs $z$ heisse $C$. Die Funktion $z$ ist gleichmässig stetig in dem betrachteten Gebiete; wird also die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig klein gegeben, so kann man die positive Zahl $\delta$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3C}$ und so klein wählen, dass

$$\text{abs}\,\varDelta z < \frac{\varepsilon}{3\,\text{abs}\,(b-a)}, \quad \text{sobald} \quad \text{abs}\,\varDelta x < \delta \quad \text{und} \quad \text{abs}\,\varDelta y < \delta.$$

Nimmt man dann abs $\varDelta a < \delta$, abs $\varDelta b < \delta$, abs $\varDelta y < \delta$, so wird

$$\text{abs}\,(\eta_1 \cdot \varDelta a) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{abs}\,(\eta_2 \cdot \varDelta b) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\text{abs}\,(b-a) \,.\, \text{abs}\,|(f(x, y+\varDelta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

mithin abs $\varDelta u < \varepsilon$. — Es existieren wieder die Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -f(a, y), \quad \frac{\partial u}{\partial b} = f(b, y).$$

Aber auch in Bezug auf $y$ kann $u$ differentiiert werden, wenn eine endliche und stetige partielle Ableitung von $z$ in Bezug auf $y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = \psi(x, y)$$

existiert. Wird nämlich $y$ im Intervall $(a_2 \ldots b_2)$ angenommen und

$$\int_a^b f(x, y_1)\,dx = u_1$$

gesetzt, so ist

$$\frac{u_1 - u}{y_1 - y} = \int_a^b \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}\,dx = \int_a^b \psi(x, \eta)\,dx,$$

wo $\eta$ zwar von $x$, $y$, $y_1$ abhängt, aber immer zwischen $y$ und $y_1$ liegt, und weiter

$$\frac{u_1 - u}{y_1 - y} = \int_a^b q\,dx + \omega, \quad \text{wo} \quad \omega = \int_a^b [\psi(x, \eta) - \psi(x, y)]\,dx.$$

Da nun (§ 17 Seite 98) $\lim \omega = 0$ für $\lim y_1 = y$, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^b q\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\,dx,$$

und da diese Ableitung eine endliche und stetige Funktion von $a$, $b$, $y$ ist:

$$du = -da\,f(a, y) + db\,f(b, y) + dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

Die Variable $y$ wird ein Parameter des Integrals genannt. *Das Integral wird unter den angegebenen Voraussetzungen in Bezug auf den Parameter y differentiiert, indem man die zu integrierende Funktion in Bezug auf y differentiiert* (Differentiation unter dem Integral-zeichen). Die Regel kann auf den Fall mehrerer Parameter ausgedehnt werden.

Partielle Differentiationen sind unter Umständen erforderlich, um gewisse Differentialquotienten zu ermitteln. Sind nämlich die beiden Argumente der Funktion $z = f(x, y)$ als Funktionen einer stetigen Variablen $u$ gegeben:

$$x = g(u), \quad y = h(u),$$

so wird

$$z = f[g(u), h(u)]$$

mittelbare Funktion von $u$. Wenn nun einem Intervall endlicher Werte von $u$ endliche Werte von $x$, $y$, $z$ entsprechen und die Voraussetzungen erfüllt sind, unter denen wir ein Totaldifferential von $z$ in Bezug auf $x$ und $y$ aufgestellt haben, wenn ferner $g(u)$ und $h(u)$ die Ableitungen

$$\frac{dx}{du} = g'(u), \quad \frac{dy}{du} = h'(u)$$

besitzen, so kann man $z$ überall nach $u$ differentiieren, wo $g(u)$ und $h(u)$ stetig sind und die Summe $p\,g'(u) + q\,h'(u)$ einen bestimmten Wert hat. Denn bei Benutzung der früheren Bezeichnungen hat man:

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \varphi(\xi, y)\frac{\Delta x}{\Delta u} + \psi(x + \Delta x, \eta)\frac{\Delta y}{\Delta u};$$

für $\lim \Delta u = 0$ ist $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$, wo $g(u)$ und $h(u)$ stetig sind, mithin:

$$\lim \varphi(\xi, y) = p, \quad \lim \psi(x + \Delta x, \eta) = q,$$

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{dx}{du}, \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}$$

und — vorausgesetzt, dass keine Unbestimmtheit eintritt —:

$$\lim \frac{\Delta z}{\Delta u} = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du} \quad \text{für} \quad \lim \Delta u = 0$$

oder

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{du}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

auch in dem Sinne, dass $x$ und $y$ die Funktionen resp. $g(u)$ und $h(u)$, $dx$ und $dy$ ihre Differentiale in Bezug auf $u$ bedeuten, d. h.

$$dx = g'(u)\,du, \quad dy = h'(u)\,du.$$

*Um also den Differentialquotienten von $z$ in Bezug auf $u$ zu erlangen, differentiiert man $z$ zuerst, als wäre nur $x$ von $u$ abhängig, sodann* *als wäre nur $y$ von $u$ abhängig, und addiert die Resultate* (mittelbare Differentiation).

Diese Regel wird wieder zu partiellen Differentiationen gebraucht. Wenn z. B.

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

Funktionen zweier Variablen sind, so wird $z$ eine Funktion von $u$ und $v$. Unter gewissen, aus dem Vorhergehenden ersichtlichen Umständen erhält man durch mittelbare Differentiation eine partielle Ableitung von $z$ in Bezug auf $u$, eine partielle Ableitung von $z$ in Bezug auf $v$, ein Totaldifferential von $z$ in Bezug auf $u$ und $v$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

wo $dx$ und $dy$ die Totaldifferentiale von $x$ resp. $y$ in Bezug auf $u$ und $v$ sind. Natürlich unterliegt weder die Anzahl der vermittelnden Funktionen noch die der unabhängigen Veränderlichen einer Beschränkung.

## § 23. Unentwickelte Funktionen.

Die Einteilung der algebraischen Funktionen in entwickelte und unentwickelte war in § 12 darauf gegründet worden, dass die einen sich durch gewisse Rechnungszeichen ausdrücken lassen, die anderen aber nicht. In der Regel werden jedoch die Funktionen in einem anderen Sinne als entwickelte oder unentwickelte bezeichnet. Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1,$$

durch welche nach den Ausführungen in §§ 20 und 21 die Grösse $y$ als eine zweideutige, überall differentiierbare Funktion von $x$ definiert wird. Man kann $y$ durch elementare Rechnungszeichen ausdrücken; aber auch ohne dies zu thun, kann man $y$ differentiieren und in anderer Weise mit $y$ operieren, indem man nur die obige Gleichung benutzt. Um die Ableitung $y'$ von $y$ zu erhalten, beruft man sich darauf, dass $x^2 + y^2$ eine mittelbare Funktion von $x$ ist, welche sich auf eine Konstante, nämlich die Eins, reduciert, deren Differentialquotient mithin verschwindet:

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0,$$

$$2x+2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Man sagt, es sei $y$ in unentwickelter Form differentiiert worden. Überhaupt wenn eine Funktion von beliebig vielen Argumenten mit den letzteren durch eine nicht nach der Funktion aufgelöste Gleichung verknüpft ist, so sagt man, die Funktion werde als unentwickelte oder implicite behandelt, solange man ihre Untersuchung nur auf jene Gleichung stützt. Drückt man die Funktion jedoch durch allgemein übliche oder besonders erklärte Rechnungszeichen aus, so erscheint sie als entwickelte oder explicite Funktion.

Stellt man zwischen irgend welchen Veränderlichen eine Gleichung auf, so wird dadurch nicht immer die eine als Funktion der anderen bestimmt. Es giebt z. B. keine Funktion $y$ von $x$, welche der Gleichung

$$x^2+y^2 = -1$$

genügt (wenn man die imaginären Zahlen ausschliesst). In jedem einzelnen Falle muss also zuerst festgestellt werden, ob sich aus der Gleichung wirklich ein Funktionsverhältnis ergiebt. Wir werden nun gewisse Bedingungen angeben, unter denen dies sicher der Fall ist.

Dabei beschränken wir uns zunächst auf zwei Variable. Es sei

$$z = f(x, y)$$

eine eindeutige Funktion der Argumente $x$ und $y$, welche unabhängig von einander die Intervalle endlicher Werte $(a_1 \dots b_1)$ resp. $(a_2 \dots b_2)$ mit Einschluss der Grenzen durchlaufen. Wir setzen voraus, *dass $z$ überall endlich ist und partielle Ableitungen*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q = \psi(x, y)$$

*besitzt, dass $p$ und $q$ durchweg endlich und stetig sind, und dass $q$ nirgends verschwindet.* Die Funktionen $z$, $p$, $q$ sind alsdann gleichmässig stetig. Man kann also, wie klein auch die positive Zahl $\varepsilon$ gewählt werde, durch passende Wahl der positiven Zahl $\delta$ bewirken, dass

$$\text{abs}\,[f(x_1, y_1) - f(x, y)] < \varepsilon,$$
$$\text{abs}\,[\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x, y)] < \varepsilon, \quad \text{abs}\,[\psi(x_1, y_1) - \psi(x, y)] < \varepsilon$$

für alle zu dem oben definierten Gebiete gehörigen Punktepaare $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$, welche die Bedingungen

$$\text{abs}\,(x_1 - x) < \delta \quad \text{und} \quad \text{abs}\,(y_1 - y) < \delta$$

erfüllen. Ist ferner $P$ die obere Grenze der absoluten Beträge von $p$, $Q$ die untere Grenze der absoluten Beträge von $q$, so ist $P$ eine endliche Zahl, $Q$ von Null verschieden. Man kann also eine Zahl

$$\lambda \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{Q}{P}$$

wählen und hat dann:

$$\lambda > 0, \quad Q - \lambda P > 0.$$

*Nennen wir $c$ irgend einen Wert, welchen die Funktion $z$ anzunehmen vermag, ohne dass man $a_2$ und $b_2$ als Werte von $y$ benutzt.* Es sei etwa

$$c = f(a, b),$$

wo $b$ von $a_2$ und $b_2$ verschieden. Dann ist

$$\begin{aligned} z - c &= [f(x, b) - f(a, b)] + [f(x, y) - f(x, b)] \\ &= (x - a)\,\varphi(\xi, b) + (y - b)\,\psi(x, \eta) = (y - b)\,\psi(a, b) + \omega, \end{aligned}$$

wo $\xi$ zwischen $a$ und $x$, $\eta$ zwischen $b$ und $y$ und

$$\begin{aligned} \omega = (x - a)\,\varphi(a, b) + (x - a)\,[\varphi(\xi, b) - \varphi(a, b)] \\ + (y - b)\,[\psi(x, \eta) - \psi(a, b)]. \end{aligned}$$

Wählt man nun die positive Zahl $\delta_1$ hinreichend klein und nimmt abs $(x - a) < \delta_1$ und abs $(y - b) < \delta_1$, so wird

$$\text{abs}\,[\varphi(\xi, b) - \varphi(a, b)] < \frac{Q - \lambda P}{2}, \quad \text{abs}\,[\psi(x, \eta) - \psi(a, b)] < \frac{Q - \lambda P}{2}.$$

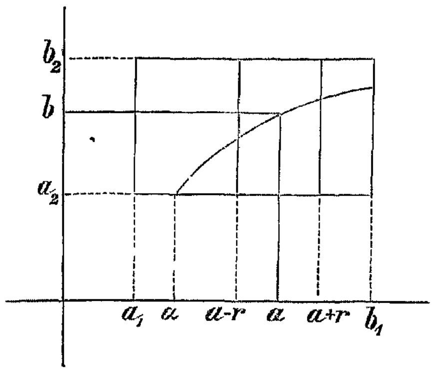
Wählt man ferner die Zahl $s$ gleich der kleinsten unter den Zahlen $\delta_1$, abs $(a_2 - b)$, abs $(b_2 - b)$, die Zahl $r$ gleich der kleineren der beiden Zahlen $s$ und $\lambda s$, so wird für abs $(x - a) < r$ und abs $(y - b) = s$:

$$\text{abs}\,\omega < \lambda s P + s\,\frac{Q - \lambda P}{2} + s\,\frac{Q - \lambda P}{2} = s\,Q < \text{abs}\,[(y - b)\,\psi(a, b)].$$

Für jedes $x$ von $a - r$ bis $a + r$ ist demnach $z - c$ eine endliche und stetige Funktion des von $a_2$ bis $b_2$ variierenden Argumentes $y$, welche in Bezug auf $y$ die durchweg endliche und von Null verschiedene Derivierte $q$ besitzt und bei $y = b + s$ das Zeichen der

Grösse $\psi(a, b)$, bei $y = b - s$ das Zeichen der Grösse $-\psi(a, b)$ annimmt. Folglich entspricht jedem $x$ von $a - r$ bis $a + r$ ein und nur ein Wert $y$ aus dem Intervall $(a_2 \ldots b_2)$ in der Weise, dass $z - c$ verschwindet, d. h. die Gleichung

Fig. 53




$$f(x, y) = c$$

ist in Bezug auf $y$ lösbar — und zwar nur auf eine Art lösbar — für alle $x$ aus einem gewissen Intervall $(A \ldots B)$ mit Einschluss der Grenzen, welches entweder mit dem Intervall $(a_1 \ldots b_1)$ zusammenfällt oder einen Teil desselben ausmacht.

Es sei $a_1 < b_1$ und $A < B$. Dann kann man das Intervall $(A \ldots B)$ über $A$ hinaus erweitern, wenn $A$ von $a_1$ und der die Gleichung $f(A, y) = c$ befriedigende Wert $y$ von $a_2$ und $b_2$ verschieden ist. Nennt man $\alpha$ die untere Grenze aller für $A$ eintretenden Werte, so ist die Gleichung $z = c$ immer erfüllbar für $\alpha < x < B$; aber auch für den Wert $\alpha$ selbst existiert eine (und nur eine) Auflösung. Denn sonst hätte abs $[f(\alpha, y) - c]$ für die $y$ aus dem Intervall $(a_2 \ldots b_2)$ ein von Null verschiedenes Minimum $m$, und es wäre, wenn man $\alpha'$ zwischen $\alpha$ und $B$ hinreichend nahe bei $\alpha$ wählt, für alle $y$ von $a_2$ bis $b_2$:

$$\text{abs}\,[f(\alpha', y) - f(\alpha, y)] < m \leq \text{abs}\,[f(\alpha, y) - c],$$

$$f(\alpha', y) - c = [f(\alpha, y) - c] + [f(\alpha', y) - f(\alpha, y)] \gtrless 0,$$

d. h. die Gleichung $f(\alpha', y) = c$ wäre nicht erfüllbar. — Ist $B$ von $b_1$ und der die Gleichung $f(B, y) = c$ befriedigende Wert $y$ von $a_2$ und $b_2$ verschieden, so kann man das Intervall $(\alpha \ldots B)$ über $B$ hinaus erweitern. Man nenne $\beta$ die obere Grenze aller für $B$ eintretenden Werte. Die Gleichung $z = c$ ist alsdann für $\alpha < x \leq \beta$ immer nach $y$ auflösbar, und zwar nur auf eine Art, d. h.:

*Unter den angegebenen Voraussetzungen wird durch die Forderung*

$$f(x, y) = c$$

*jedem Werte $x$ aus einem bestimmten Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ mit Einschluss der Grenzen ein und nur ein Wert $y$ zugeordnet, und es wird also $y$ eine eindeutige und endliche Funktion von $x$ mit stetigem Argument.*

Die Zahl $\alpha$ fällt entweder mit $a_1$ zusammen oder der zugehörige Wert der Funktion $y$ ist eine der Zahlen $a_2$, $b_2$; ebenso fällt $\beta$ entweder mit $b_1$ zusammen oder der zugehörige Wert der Funktion $y$ ist eine der Zahlen $a_2, b_2$. Zwischen diesen Grenzen wird die Funktion $y$ durch eine begrenzte stetige* Kurve dargestellt, welche in dem das Gebiet der Argumente der Funktion $z$ darstellenden Rechteck verläuft, und deren beide Endpunkte auf dem Perimeter des Rechtecks liegen. Die Gleichung, durch welche die Funktion $y$ definiert wurde, wird eine Gleichung dieser Linie genannt.

*Die Funktion $y$ ist überall stetig.*

Beweis: Es seien $x$ und $x_1$ Werte aus dem Intervall $(\alpha\ldots\beta)$, $y$ und $y_1$ die zugehörigen Werte der Funktion, also

$$f(x, y)=c,\quad f(x_1, y_1)=c,\quad [f(x_1, y)-f(x, y)]+[f(x_1, y_1)-f(x_1, y)]=0,$$

$$(x_1-x)\,\varphi(\xi, y)+(y_1-y)\,\psi(x_1, \eta)=0,$$

wo $\xi$ zwischen $x$ und $x_1$, $\eta$ zwischen $y$ und $y_1$. Dann ist

$$y_1-y=-(x_1-x)\,\frac{\varphi(\xi, y)}{\psi(x_1, \eta)},\quad \operatorname{abs}(y_1-y)<\frac{P}{Q}\operatorname{abs}(x_1-x),$$

$$\lim y_1=y \quad \text{für} \quad \lim x_1=x.$$

*Die Funktion $y$ kann überall nach $x$ differentiiert werden, und zwar ist*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Beweis: Unter Beibehaltung der eben benutzten Bezeichnungen ist der Differenzenquotient

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=-\frac{\varphi(\xi, y)}{\psi(x_1, \eta)}.$$

Wie klein aber auch die positive Zahl $\varepsilon$ vorgeschrieben werden mag, so lässt sich doch durch passende Wahl der positiven Zahl $\delta_2$ bewirken, dass für $\operatorname{abs}(x_1-x)<\delta_2$ und $\operatorname{abs}(y_1-y)<\delta_2$:

$$\operatorname{abs}[\varphi(x_1, y_1)-p]<\varepsilon,\quad \operatorname{abs}[\psi(x_1, y_1)-q]<\varepsilon,$$

auch wenn $x$ und $y$, $x_1$ und $y_1$ unabhängig von einander in ihren ursprünglichen Intervallen variieren. Ist also $\delta$ die kleinere der beiden Zahlen $\delta_2$ und $\frac{Q\,\delta_2}{P}$, und werden wieder $y$ und $y_1$ als Werte

* Siehe den nachfolgenden Satz.

der durch die Gleichung $z = c$ definierten Funktion betrachtet, so ist für $\text{abs}\,(x_1 - x) < \delta$:

$$\text{abs}\,(\xi - x) < \text{abs}\,(x_1 - x) < \delta_2, \quad \text{abs}\,(\eta - y) < \text{abs}\,(y_1 - y) < \delta_2,$$
$$\text{abs}\,|\varphi(\xi, y) - p| < \varepsilon, \quad \text{abs}\,|\psi(x_1, \eta) - q| < \varepsilon,$$

folglich für $\lim x_1 = x$:

$$p = \lim \varphi(\xi, y), \quad q = \lim \psi(x_1, \eta), \quad \frac{p}{q} = \lim \frac{\varphi(\xi, y)}{\psi(x_1, \eta)}.$$

Der gefundene Differentialquotient ist durchweg endlich, und daraus folgt wieder die Stetigkeit der Funktion; aber diese Stetigkeit wurde bei dem Beweise der Differentiierbarkeit bereits vorausgesetzt.

Man kann den Differentialquotienten jetzt auch auf folgende Weise herstellen. In Rücksicht auf die zwischen $x$ und $y$ statuierte Abhängigkeit ist $f(x, y)$ als eine mittelbare Funktion der einen Grösse $x$ zu betrachten, welche sich auf die Konstante $c$ reduciert, deren Differential mithin verschwindet. Aus der Gleichung $f(x, y) = c$ folgert man also:

$$df = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Aber diese Differentiation der Gleichung $f(x, y) = c$ setzt (§ 22 Seite 140) die Existenz des Differentialquotienten von $y$ in Bezug auf $x$ voraus und darf nicht als ein Beweis für die Differentiierbarkeit der unentwickelten Funktion angesehen werden.

Die vorstehenden Sätze finden insbesondere Anwendung auf die algebraischen Funktionen. Jede algebraische Funktion $y$ von $x$ befriedigt eine Gleichung von der Form

$$f(x, y) = 0,$$

deren linke Seite eine ganze Funktion von $x$ und $y$ ist. Aber es wird (wenn man die imaginären Zahlen ausschliesst) nicht umgekehrt durch jede derartige Gleichung eine Funktion definiert; dazu ist vielmehr notwendig und hinreichend die Existenz eines Wertepaares, welches die Funktion $f(x, y)$ zu Null macht, ohne dass gleichzeitig die nach $y$ genommene partielle Ableitung verschwindet. An der in gewissen Intervallen durch die obige Gleichung definierten algebraischen Funktion hat man im allgemeinen mehrere Zweige zu unterscheiden; jeder Zweig stellt eine Funktion mit stetiger Variablen dar und ist differentiierbar. Da die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ wieder ganze Funktionen von $x$ und $y$ sind, so erscheint der Differentialquotient

$$y' = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

rational durch $x$ und $y$ ausgedrückt. Durch Elimination von $y$ zwischen den beiden Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) + y' \psi(x, y) = 0$$

entsteht eine algebraische Gleichung zwischen $x$ und $y'$, mithin ist die Derivierte einer algebraischen Funktion allemal wieder eine algebraische Funktion, und zwar* im Sinne des § 12 unentwickelbar, wenn die Stammfunktion unentwickelbar ist.

Wir können jetzt den Beweis dafür erbringen, *dass der Logarithmus eine transcendente Funktion ist.* Wäre $\log x$ eine algebraische Funktion, so müsste diese (vergl. § 14 Schluss) rational und gebrochen sein, also von der Form $\frac{u}{v}$, wo $u$ und $v$ ganze Funktionen von $x$ ohne gemeinschaftlichen Teiler bedeuten, und man erhielte durch Differentiation:**

$$\frac{1}{x} = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad \text{oder} \quad x(vu' - uv') = v^2,$$

wo

$$u' = \frac{du}{dx}, \quad v' = \frac{dv}{dx}.$$

Hiernach wäre $x$ ein Teiler von $v$, etwa $v = x^n w$, wo $n$ eine positive ganze Zahl und $w$ eine durch $x$ nicht teilbare ganze Funktion von $x$ bedeutet; folglich wäre

$$v' = x^n w' + n x^{n-1} w, \quad n u w = x(wu' - uw' - x^{n-1} w^2),$$

d. h. $u$ durch $x$ teilbar. — Ebensowenig, wie zwischen $x$ und $\log x$, besteht zwischen $e^x$ und $x$, überhaupt zwischen $a^x$ und $x$ eine algebraische Gleichung, also *sind auch die Exponentialfunktionen transcendent.*

Die Potenz $x^n$ ist eine algebraische Funktion von $x$, sobald $n$ rational ist. Aber *für jeden irrationalen Exponenten $n$ ist $x^n$ eine transcendente Funktion von $x$.* Ist nämlich***

* Vergl. Stickelberger, Crelles Journal Bd. 82 S. 45.

** Liouville, Journal de Math. pures et appl. T. II. p. 67.

*** Einen längeren Beweis giebt Liouville, a. a. O. p. 86 flgg.

$$f(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad y = x^n,$$

wo $f(x, y)$ eine irreducible ganze Funktion von $x$ und $y$ sein soll, also

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = x^n, \quad y' = n x^{n-1} = \frac{n y}{x},$$

so existiert eine Konstante $C$ derart, dass identisch

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + n y \frac{\partial f}{\partial y} = C f(x, y),$$

weil die linke Seite allemal mit der rechten verschwindet. Setzt man

$$f(x, y) = x^p f_p(y) + \ldots + x f_1(y) + f_0(y),$$
$$f_p(y) = a_q y^q + \ldots + a_1 y + a_0, \quad f_0(y) = b_r y^r + \ldots + b_1 y + b_0,$$

so kommt:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + n y \frac{\partial f}{\partial y} = x^p [p f_p(y) + n y f_p'(y)] + \ldots + n y f_0'(y),$$
$$C f_p(y) = p f_p(y) + n y f_p'(y) = (p + n q) a_q y^q + \ldots,$$
$$C f_0(y) = n y f_0'(y) = n r b_r y^r + \ldots,$$
$$C = p + n q = n r, \quad n = \frac{p}{r - q} \quad \text{rational.}$$

Der Arcus-Tangens ist eine transcendente Funktion; denn wäre $\operatorname{arctg} x$ eine algebraische Funktion von $x$, so müsste diese von der Form $\frac{u}{v}$ sein, wo $u$ und $v$ ganze Funktionen von $x$ ohne gemeinschaftlichen Teiler bedeuten, und man erhielte:

$$(1 + x^2)(v u' - u v') = v^2, \quad \text{also} \quad v = (1 + x^2)^n w,$$

wo $n$ eine positive ganze Zahl, $w$ eine durch $1 + x^2$ nicht teilbare ganze Funktion von $x$, weiter:

$$v' = (1 + x^2)^n w' + 2 n (1 + x^2)^{n-1} x w,$$
$$2 n x u w = (1 + x^2) [w u' - u w' - (1 + x^2)^{n-1} w^2],$$

d. h. $u$ durch $1 + x^2$ teilbar. Da hiernach auch $\operatorname{tg} x$ eine transcendente Funktion ist, so können $\operatorname{cotg} x$, $\sin x$, $\cos x$ nicht algebraische Funktionen sein; denn sonst wäre auch $\operatorname{tg} x$ algebraisch, als algebraische Funktion von jeder der anderen:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}.$$

Mithin sind auch $\operatorname{arccotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ nicht algebraisch. *Alle trigonometrischen Funktionen sind transcendent.*

Bei einer unentwickelten Funktion von mehreren Independenten wird es sich um die partiellen Ableitungen und das Totaldifferential handeln. Es genügt, zwei unabhängige Variablen anzunehmen. Man kann dann nach Analogie des für eine einzige Independente geführten Beweises den folgenden Satz herleiten:

*Ist $f(x, y, z)$ eine eindeutige und endliche Funktion der Grössen $x$, $y$, $z$, welche zunächst unabhängig von einander in einem gewissen Gebiete stetig variieren, $c$ irgend ein im Innern des Gebietes vorkommender Funktionswert, $f$ in Bezug auf $x$, $y$, $z$ differentiierbar, und sind die drei partiellen Ableitungen überall endlich und stetig, während die nach $z$ genommene nirgends verschwindet, so wird durch die Forderung*

$$f(x, y, z) = c$$

*jedem Wertepaare $x$, $y$ aus einem bestimmten Gebiete ein und nur ein Wert $z$ zugeordnet; es wird $z$ eine eindeutige, endliche und stetige Funktion der stetigen Argumente $x$, $y$ und kann nach $x$ und nach $y$ differentiiert werden.*

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

sind durchweg endlich und werden auch durch Differentiation der Gleichung $f(x, y, z) = c$ gefunden. Sofern nämlich $z$ jene Funktion von $x$ und $y$ bedeutet, sind die partiellen Ableitungen von $f$ nach $x$ und $y$ der Null gleich zu setzen, ebenso das Totaldifferential von $f$:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich das Totaldifferential von $z$ direkt:

$$dz = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

## § 24. Unendliche Reihen mit positiven Gliedern.

Ein wichtiges Hilfsmittel der Funktionenlehre sind die unendlichen Reihen. Das Verhalten der unendlichen Reihen ist ein wesentlich verschiedenes, jenachdem alle Glieder einerlei Vorzeichen haben oder nicht. Wir beginnen mit denjenigen Reihen, welche nur positive Glieder enthalten.

Sind unendlich viele positive, endliche Zahlen gegeben (die Null nicht ausgeschlossen):

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots \text{ (in infinitum)},$$

so kann von einer Summe dieser Zahlen zunächst nicht die Rede sein. Es lassen sich aber aus ihnen unendlich viele Partialsummen bilden, d. h. Summen von der Form

$$s = a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + \ldots + a_\mu \; (\alpha < \beta < \gamma < \ldots < \mu).$$

Besondere Partialsummen sind die folgenden:

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ \ldots$$

Da $s_\mu$ die Summe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu$ bedeuten wird, in welcher alle Addenden von $s$ vorkommen, so ist

$$0 < s < s_\mu.$$

In der Reihe der positiven Grössen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ findet überall Zunahme oder doch nirgends eine Abnahme statt. Wäre die Reihe der Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ begrenzt, mithin auch die Reihe der Zahlen $s_0, s_1, \ldots$, so würde die grösste unter den letzteren die Summe der ersteren vorstellen. Da aber unserer Annahme zufolge jene Reihen endlos fortlaufen, so dürfen wir bei den Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ nur von einer oberen Grenze, nicht von einem Maximum sprechen. Diese obere Grenze wird die Summe der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ genannt; wir bezeichnen sie mit $S$ und schreiben:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = S.$$

Der Index $n$ der Grösse $s_n$ ist als eine Variable zu betrachten, welche die Werte

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \text{ (in infinitum)}$$

durchläuft und sich mithin der Zahl $+\infty$ beliebig zu nähern vermag; $a_n$ und $s_n$ sind von $n$ abhängig. Während $n$ sich der Zahl $+\infty$ nur zunehmend nähert, nimmt $s_n$ niemals ab; folglich ist (§ 8 Seite 42)

$$S = \lim s_n \quad \text{für} \quad \lim n = +\infty.$$

Bei der Herstellung der Summe $S$ spielt dem Anscheine nach die Reihenfolge, in welcher die Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ aufgestellt werden, eine Rolle. In Wirklichkeit ist jedoch die Zahl $S$ von der Reihenfolge der Summanden ebenso unabhängig, wie die Summe einer endlichen Gliederzahl; denn sie kann als die obere Grenze aller Partialsummen definiert werden, da die obere Grenze der Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ sich nicht ändert, wenn irgendwelche Zahlen $s < s_n < S$ hinzutreten (§ 4 Seite 17).

Man kann allemal Glieder in endlicher Menge so herausheben, dass ihre Summe der Zahl $S$ beliebig nahe kommt, und diese Annäherung wird noch verstärkt, wenn man Glieder aus dem Rest hinzunimmt. Ohne die Summe der unendlichen Reihe zu ändern, darf man Glieder zusammenfassen oder Glieder in positive Addenden zerlegen. Werden alle Glieder mit einer und derselben positiven Zahl $\varrho$ multipliciert, so wird zugleich die Summe mit $\varrho$ multipliciert, da

$$\varrho a_0 + \varrho a_1 + \ldots + \varrho a_n = \varrho s_n, \quad \lim(\varrho s_n) = \varrho S \quad \text{für} \quad \lim n = \infty.$$

Beispiele: In der unendlichen Reihe (geometrischen Progression)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

nehmen wir $x > 0$; es ist hier

$$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x}{1 - x} x^n.$$

Solange $x$ unterhalb der Einheit bleibt, hat man für $\lim n = \infty$:

$$\lim x^n = 0, \quad \lim s_n = \frac{1}{1 - x}, \quad S = \frac{1}{1 - x}.$$

Dagegen kommt bei $x = 1$:

$$s_n = n + 1, \quad \lim s_n = \infty, \quad S = \infty.$$

Folglich ist umsomehr:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \infty \quad \text{bei} \quad x > 1.$$

Den Summenwert $\infty$ liefert auch die sogenannte harmonische Reihe

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

welche nach Zusammenfassung von Gliedern die Form

$$(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + (\tfrac{1}{9} + \ldots + \tfrac{1}{16}) + \ldots$$

annimmt; hier ist nämlich

$$a_0 > \tfrac{1}{2}, \quad a_1 > \tfrac{2}{4}, \quad a_2 > \tfrac{4}{8}, \quad a_3 > \tfrac{8}{16}, \ldots,$$

folglich $s_n > \frac{1}{2}(n + 1)$. Überhaupt wird bei $\sigma \leq 1$:

$$\frac{1}{1^\sigma}+\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}+\dots=\infty,\quad \frac{\varrho}{1^\sigma}+\frac{\varrho}{2^\sigma}+\frac{\varrho}{3^\sigma}+\dots=\infty,$$

z. B.

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots=\infty,\quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\dots=\infty.$$

Dagegen besitzt bei $\sigma>1$ die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^\sigma}+\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}+\dots=\frac{1}{1^\sigma}+\left(\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{4^\sigma}+\frac{1}{5^\sigma}+\frac{1}{6^\sigma}+\frac{1}{7^\sigma}\right)+\dots$$

eine endliche Summe, da nach der Zusammenfassung

$$a_0<1,\quad a_1<\frac{2}{2^\sigma}=\frac{1}{2^{\sigma-1}},\quad a_2<\frac{4}{4^\sigma}=\left(\frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)^2,\ \dots$$

und mithin

$$s_n<1+\frac{1}{2^{\sigma-1}}+\left(\frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2^{\sigma-1}}\right)^n<\frac{1}{1-2^{1-\sigma}}.$$

Die Reihe $a_0+a_1+a_2+\dots$ heisst **konvergent** oder **divergent**, jenachdem ihre Summe endlich oder unendlich ist. Z. B. die geometrische Reihe

$$1+x+x^2+x^3+\dots$$

ist konvergent für $0<x<1$, divergent für $x>1$; die Reihe

$$\frac{1}{1^\sigma}+\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}+\dots$$

ist konvergent für $\sigma>1$, divergent für $\sigma<1$. Die Reihenfolge der Glieder übt keinen Einfluss auf die Konvergenz aus. Kann man eine endliche Zahl $S'$ angeben, welche von keiner Partialsumme überstiegen wird, so ist die Reihe konvergent und ihre Summe $S<S'$. Verkleinert man Glieder einer konvergenten Reihe, so erhält man wieder eine konvergente Reihe; vergrössert man Glieder einer divergenten Reihe, so erhält man wieder eine divergente Reihe. Z. B. da

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\ \text{konvergent},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots\ \text{divergent},$$

so sind auch

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\ \text{konvergent},\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots\ \text{divergent}.$$

Bei Untersuchung der Konvergenz darf man Glieder in endlicher Menge fortlassen oder zusetzen.

Wenn die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ konvergiert, so ist für $\lim n = \infty$:

$$\lim s_n = S, \quad \lim s_{n-1} = S, \quad \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim a_n = 0.$$

Folglich wird in jeder konvergenten Reihe $a_n$ unendlich klein für unendlich grosse $n$. Aber die Umkehrung ist nicht richtig, wie das Beispiel der harmonischen Reihe lehrt. Untersuchen wir zuerst, welche Folgerungen sich ziehen lassen, wenn $a_n$ mit endlos wachsendem $n$ dem Grenzwerte Null zustrebt, gleichviel ob die Reihe konvergiert oder divergiert.

Ist $\lim a_n = 0$, so haben die Glieder der Reihe die untere Grenze Null. Das Umgekehrte findet nicht immer statt; vielmehr darf, wenn $\lim a_n = 0$ sein soll, nur eine *endliche* Anzahl von Gliedern die beliebig kleine positive Zahl $\varepsilon$ übertreffen (wobei $\varepsilon$ kleiner als eine der Zahlen $a_0, a_1 \ldots$ angenommen wird). Die Glieder einer solchen Reihe haben eine endliche obere Grenze, welche zugleich Maximum ist, nämlich gleich dem grössten unter den die Zahl $\varepsilon$ übertreffenden Gliedern.

Aus $\lim a_n = 0$ folgt immer:

$$\lim \frac{s_n}{n+1} = \lim \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} = 0 \quad \text{für} \quad \lim n = \infty,$$

auch wenn die Reihe divergiert und mithin $\lim s_n = \infty$ ist.

Beweis: Wir nennen $b_n$ die grösste unter den Zahlen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ und setzen zur Abkürzung

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_n = t_n,$$

so dass

$$\lim b_n = 0, \quad b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots, \quad t_n \geqq (n+1)\, b_{n+1},$$

$$\frac{(n+2)\, t_n}{(n+1)\, t_{n+1}} = \frac{(n+1)\, t_n + t_n}{(n+1)\, t_n + (n+1)\, b_{n+1}} \geqq 1, \quad \frac{t_n}{n+1} \geqq \frac{t_{n+1}}{n+2},$$

d. i.

$$\frac{t_0}{1} \geqq \frac{t_1}{2} \geqq \frac{t_2}{3} \geqq \ldots$$

Die Zahlen $t_0, \frac{1}{2} t_1, \frac{1}{3} t_2, \ldots$ haben eine untere Grenze $\omega \geqq 0$, und zwar ist (§ 8 Seite 42 flg.)

$$\omega = \lim \frac{t_n}{n+1} \quad \text{für} \quad \lim n = \infty.$$

Wäre $\omega > 0$, so könnte man $n$ so gross nehmen, dass

$$b_{n+1} < \frac{\omega}{2} \quad \text{und} \quad \frac{t_n}{n+1} - \omega < \frac{\omega}{2},$$

und hätte dann $\frac{t_{2n+1}}{2n+2} > \omega$, zugleich aber auch:

$$t_n < \tfrac{3}{2}(n+1)\,\omega, \quad b_{n+1} < \frac{\omega}{2}, \quad b_{n+2} < \frac{\omega}{2}, \ldots, b_{2n+1} < \frac{\omega}{2},$$
$$t_{2n+1} < (2n+2)\,\omega.$$

Folglich ist $\omega = 0$ und wegen $s_n < t_n$ auch $\lim \frac{s_n}{n+1} = 0$.

Ist $\lim a_n = \infty$, so haben die Glieder der Reihe eine endliche untere Grenze, welche zugleich Minimum ist. Bezeichnet man dann mit $c_n$ die kleinste unter den Zahlen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ und mit $u_n$ die Summe $c_0 + c_1 + \ldots + c_n$, so wird

$$\lim c_n = \infty, \quad c_0 < c_1 \leq \ldots, \quad \frac{u_0}{1} < \frac{u_1}{2} < \frac{u_2}{3} < \ldots,$$

und es ergiebt sich wieder ein Grenzwert

$$\Omega = \lim \frac{u_n}{n+1} \quad \text{für} \quad \lim n = \infty.$$

Wäre $\Omega$ endlich, so liesse $n$ sich so gross bestimmen, dass

$$c_{n+1} > \tfrac{3}{2}\,\Omega \quad \text{und} \quad \Omega - \frac{u_n}{n+1} < \frac{\Omega}{2}.$$

Man hätte dann $\frac{u_{2n+1}}{2n+2} < \Omega$, zugleich aber auch:

$$u_n > \frac{n+1}{2}\,\Omega, \quad c_{n+1} > \tfrac{3}{2}\,\Omega, \quad c_{n+2} > \tfrac{3}{2}\,\Omega, \ldots, c_{2n+1} > \tfrac{3}{2}\,\Omega,$$
$$u_{2n+1} > (2n+2)\,\Omega.$$

Folglich ist $\Omega = \infty$ und wegen $s_n > u_n$ auch $\lim \frac{s_n}{n+1} = \infty$. Überhaupt gilt der Satz:

*Wenn $a_n$ bei unbegrenzt wachsendem $n$ einem Grenzwerte $\sigma$ zustrebt, so ist auch**

$$\lim \frac{s_n}{n+1} = \sigma \quad \textit{für} \quad \lim n = \infty.$$

Der Beweis braucht nur noch für endliche $\sigma$ geführt zu werden. Wird zur Abkürzung abs $(a_n - \sigma)$ durch $d_n$ bezeichnet, so ergiebt sich:

---

* Dieser Satz findet sich bei Cauchy, Analyse algébrique Chap. II., als Folgerung aus einem allgemeineren Satze. Er bleibt giltig, wenn $a_0, a_1, a_2 \ldots$ beliebige Zeichen haben, vorausgesetzt, dass $\sigma$ nur bestimmt unendlich wird; aber er ist nicht umkehrbar. Vergl. den folgenden Paragraphen.

$$\lim d_n = 0, \quad \lim \frac{d_0 + \ldots + d_n}{n+1} = 0, \quad \frac{s_n}{n+1} - \sigma = \frac{(a_0 - \sigma) + \ldots + (a_n - \sigma)}{n+1},$$

$$\operatorname{abs}\left(\frac{s_n}{n+1} - \sigma\right) < \frac{d_0 + \ldots + d_n}{n+1}, \quad \lim\left(\frac{s_n}{n+1} - \sigma\right) = 0.$$

Um die Konvergenz einer Reihe zu prüfen, hat man zahlreiche Kriterien aufgestellt. Eines der wichtigsten besteht in der Vergleichung der Reihe mit andern, deren Verhalten man kennt (vergl. oben Seite 152). Wenn die Glieder der Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ die entsprechenden Glieder einer konvergenten Reihe $u_0 + u_1 + \ldots$ nicht übersteigen, so ist auch die erste Reihe konvergent; z. B. wenn die Reihe $u_0 + u_1 + \ldots$ konvergiert und man hat unendlich viele positive Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ mit einer endlichen oberen Grenze $G$, so entsteht durch Komposition die Reihe

$$\varrho_0 u_0 + \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2 + \ldots,$$

welche sicher konvergiert; denn die Reihe $G u_0 + G u_1 + \ldots$ ist konvergent (Seite 151) und

$$\varrho_0 u_0 < G u_0, \quad \varrho_1 u_1 < G u_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Am häufigsten wird die zu prüfende Reihe (direkt oder indirekt) mit der geometrischen Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ oder

$$a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + \ldots$$

verglichen. In dieser hat der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder einen konstanten (d. h. von $n$ unabhängigen) Wert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x,$$

und die Reihe ist konvergent oder divergent, jenachdem dieser Wert unter der Einheit liegt oder nicht. In der beliebigen Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ wird der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mit $n$ variieren zwischen zwei Grenzen $g$ und $G$ $(0 < g < G)$; bezeichnet man ihn mit $q_n$, so ist

$$a_1 = a_0 q_0, \quad a_2 = a_0 q_0 q_1, \quad \ldots, \quad a_n = a_0 q_0 q_1 \ldots q_{n-1},$$
$$a_0 g^n < a_n \leq a_0 G^n,$$

und man wird die vorgelegte Reihe mit den geometrischen Reihen

$$a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + \ldots, \quad a_0 + a_1 G + a_2 G^2 + \ldots$$

vergleichen. Die vorgelegte Reihe konvergiert sicher bei $G < 1$; sie divergiert sicher bei $g > 1$; über die anderen Fälle lässt sich nichts allgemeines sagen.

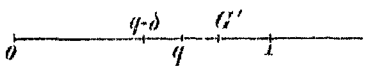
*Wenn bei endlos wachsendem $n$ der Quotient $q_n$ einem Grenzwerte $q$ zustrebt:*

$$q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \textit{für} \quad \lim n = \infty,$$

*und es ist $q < 1$, so konvergiert die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$; ist dagegen $q > 1$, so divergiert die Reihe.*

Beweis: Im Falle $0 \leq q < 1$ nehme man $G'$ zwischen $q$ und $1$ beliebig, bezeichne die positive Zahl $G' - q$ mit $\delta$ und bestimme die positive Zahl $m$ so gross, dass $q_n$ zwischen $q - \delta$ und $q + \delta$ bleibt für alle $n > m$; da alsdann in der Reihe

Fig. 54.



$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots$$

die Quotienten $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots$ kleiner als $G'$ und ihre obere Grenze $< G' < 1$ ausfallen, so konvergiert die Reihe $a_{m+1} + \dots$, mithin auch die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ (Seite 152). Im Falle $q > 1$ nehme man $g'$ zwischen $1$ und $q$ beliebig, bezeichne die positive Zahl $q - g'$ mit $\delta$ und bestimme die positive ganze Zahl $m$ so gross, dass $q_n$ zwischen $q - \delta$ und $q + \delta$ bleibt für alle $n > m$; die Quotienten $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots$ werden jetzt sämtlich $> g'$, ihre untere Grenze $> g' > 1$, die Reihe divergent.

Fig. 55.

Beispiele: Es sei $x$ eine positive Variable. In der Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \text{wo} \quad n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots n,$$

findet man:

$$q_n = \frac{x}{n+1}, \quad \lim q_n = 0,$$

folglich konvergiert die Reihe immer. Mit ihr konvergieren die folgenden:

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Dagegen kommt es in den Reihen

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, \quad \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

auf die Grösse von $x$ an; beide konvergieren für $x < 1$ und divergieren für $x > 1$; dass sie für $x = 1$ divergieren, ist schon auf Seite 151 flg. gezeigt. Endlich die Reihe

$$\frac{1}{1^\sigma}+\frac{1}{2^\sigma}+\frac{1}{3^\sigma}+\dots$$

liefert:

$$q_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^\sigma, \quad \lim q_n = 1;$$

daraus erfahren wir nichts bestimmtes über das Verhalten der Reihe. In der That konvergiert sie für $\sigma > 1$ und divergiert für $\sigma \leqq 1$.

*Die Addition und Multiplikation zweier unendlichen Reihen*

$$a_0+a_1+a_2+\dots = S, \quad b_0+b_1+b_2+\dots = T$$

*wird wie die zweier gewöhnlichen Summen vollzogen:* Die Reihe, welche alle Glieder beider Reihen umfasst, stellt die Summe $S+T$ dar; multipliciert man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Gliede der andern, so entsteht eine neue Reihe mit der Summe $ST$; d. h.:

$$\begin{aligned}
S+T &= a_0+b_0+a_1+b_1+\dots = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\dots,\\
ST &= a_0b_0+a_1b_0+a_2b_0+\dots\\
&\quad + a_0b_1+a_1b_1+a_2b_1+\dots\\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\\
&= a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1+a_1b_1)+(a_2b_0+a_0b_2+a_2b_1+a_1b_2+a_2b_2)+\dots\\
&= a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)+\dots
\end{aligned}$$

Zum Beweise führen wir noch folgende Abkürzungen ein:

$$b_0+\dots+b_n = t_n, \quad a_n+b_n = c_n, \quad a_0b_0 = d_0, \quad a_1b_0+a_0b_1+a_1b_1 = d_1, \dots,$$
$$(a_nb_0+a_0b_n)+(a_nb_1+a_1b_n)+\dots+(a_nb_{n-1}+a_{n-1}b_n)+a_nb_n = d_n.$$

Dann wird

$$c_0+c_1+\dots+c_n = s_n+t_n, \quad d_0+d_1+\dots+d_n = s_nt_n,$$

folglich für $\lim n = \infty$, wegen $S = \lim s_n$ und $T = \lim t_n$:

$$\begin{aligned}
S+T &= \lim(s_n+t_n) = \lim(c_0+c_1+\dots+c_n) = c_0+c_1+\dots,\\
ST &= \lim(s_nt_n) = \lim(d_0+d_1+\dots+d_n) = d_0+d_1+\dots
\end{aligned}$$

Beide Regeln lassen sich ohne weiteres auf jede beliebige Anzahl von Reihen ausdehnen.

## § 25. Unendliche Reihen mit beliebigen Gliedern.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten nicht bloss für Reihen mit positiven Gliedern, sondern mit den nötigen Änderungen überhaupt für Reihen, deren Glieder einerlei Zeichen besitzen. Nehmen wir jetzt unendlich viele Zahlen mit endlichen Beträgen, aber mit beliebigen Vorzeichen:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \ldots \text{ (in infinitum)},$$

und setzen wieder $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n$, so wird $s_n$ nicht immer einem Grenzwerte für $\lim n = \infty$ zustreben; bei geeigneter Beschaffenheit der Glieder ergiebt sich jedoch ein solcher Grenzwert, und zwar ist er bald endlich, bald unendlich.

Z. B.: In der Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

ist $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$, ..., überhaupt $s_{2n} = 1$, $s_{2n+1} = 0$, aber weder 1 noch 0 ist Grenzwert von $s_n$. Dagegen ist in der Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$, wo $x$ eine positive oder negative Zahl, aber nicht die Eins, vorstellen soll:

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \lim s_n = \frac{1}{1 - x} \quad \text{oder} \quad \infty, \quad \text{jenachdem abs } x \lessgtr 1.$$

Bei $x > 0$ sind alle Glieder positiv, bei $x < 0$ sind die Glieder abwechselnd positiv und negativ.

Die aus Binomialkoefficienten gebildete Reihe

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots + (-1)^n \binom{m}{n} + \ldots;$$

in welcher $m$ eine beliebige positive oder negative Zahl bedeutet, giebt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - m}{n+1}, \quad s_n = (-1)^n \binom{m-1}{n}, \quad \frac{s_n}{n+1} = \frac{(-1)^n}{m} \binom{m}{n+1} = -\frac{a_{n+1}}{m},$$

da

$$(-1)^{n-1} \binom{m-1}{n-1} + (-1)^n \binom{m}{n} = (-1)^n \binom{m-1}{n}.$$

Die Differenz $n - m$ ist mindestens von einer gewissen Stelle an positiv, so dass von da an sämtliche Glieder einerlei Zeichen besitzen. Ist $m + 1$ positiv, mithin $n - m < n + 1$, so nehmen die Beträge dieser Glieder fortwährend ab, die untere Grenze der Beträge ist $= \pm \lim a_n$; ist $m + 1$ negativ, mithin $n - m > n + 1$, so nehmen die Beträge derselben Glieder fortwährend zu, die obere Grenze der Beträge ist $= \pm \lim a_n$. Ein Grenzwert $\sigma = \lim a_n$ für $\lim n = \infty$ ergiebt sich demnach in beiden Fällen, und man hat überdies (Seite 154):

$$\sigma = \lim \frac{s_n}{n+1} = \lim \frac{a_{n+1}}{m} = \frac{\sigma}{m}.$$

Hiernach ist $\sigma$ entweder 0 oder $\infty$, und zwar muss sein:

$$\sigma = 0 \quad \text{für} \quad m > -1, \quad \sigma = \infty \quad \text{für} \quad m < -1,$$

d. h. (vergl. § 12 Seite 64):

$$\lim \binom{m-1}{n} = 0 \quad \text{oder} \quad \infty, \quad \text{jenachdem } m \gtrless 0.$$

Diesmal strebt also $s_n$ einem Grenzwerte zu, der Null ist für die positiven $m$, unendlich für die negativen $m$.

Sind $k$ und $m$ positive ganze Zahlen und schreibt man $\sigma_m$ für $s_{(k+1)m-1}$, so giebt die unendliche Reihe*

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}-1+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}$$
$$+\frac{1}{2k+1}+\ldots+\frac{1}{3k}-\frac{1}{3}+\ldots,$$

falls $n$ zwischen $(k+1)m-2$ und $(k+1)(m+1)-1$ liegt:

$$\sigma_m = \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{km},$$

$$\sigma_{m+1} = \sigma_m + \frac{1}{km+1}+\frac{1}{km+2}+\ldots+\frac{1}{km+k}-\frac{1}{m+1},$$

$$0 < s_n - \sigma_m < \frac{1}{km+1}+\ldots+\frac{1}{km+k} < \frac{1}{m}.$$

Da nun (§ 19 Seite 113) $\lim \sigma_m = \log k$ für $\lim m = \infty$, so folgt:

$$\lim s_n = \log k \quad \text{für} \quad \lim n = \infty.$$

Führt die unausgesetzte Vergrösserung von $n$ zu einem Grenzwerte $S$ der Summe $s_n$, so wird $S$ die **Summe der unendlichen Reihe** genannt. Man schreibt dann:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = S,$$

also insbesondere:

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{oder} \quad \infty, \quad \text{jenachdem abs } x \lessgtr 1,$$

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots = 0 \quad \text{oder} \quad \infty, \quad \text{jenachdem } m \gtrless 0,$$

$$1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \ldots = 0.$$

* **Riemann**, Partielle Differentialgleichungen S. 42 flg.

Eine unendliche, aber nicht bestimmt unendliche* Summe giebt die Reihe

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots = \infty,$$

für welche $s_{2n} = n + 1$, $s_{2n+1} = -n - 1$.

Werden alle Glieder mit einer und derselben Zahl $\varrho$ multipliciert, so wird zugleich die Summe mit $\varrho$ multipliciert. In jeder summierbaren Reihe darf man, ohne die Summe zu ändern, Glieder zusammenfassen, aber nicht nach Belieben zerlegen. Es ist z. B.

$$\begin{aligned}\log 2 &= 1 + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3} + \ldots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots,\end{aligned}$$

dagegen führt von der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots = 2$$

eine Zerlegung der Glieder zu folgender Reihe:

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{3}{4} + 1 - \tfrac{7}{8} + \ldots,$$

welche keine Summe besitzt, da $\lim s_{2n} = 2$, aber $\lim s_{2n+1} = 3$. Jedoch ist es (ausser bei unbestimmt unendlicher Summe) erlaubt, Glieder in Teile von einerlei Zeichen aufzulösen, da die Zahlen, welche dann in die Reihe $s_0, s_1, s_2, \ldots$ etwa zwischen $s_n$ und $s_{n+1}$ eingeschoben werden, auch der Grösse nach zwischen $s_n$ und $s_{n+1}$ zu liegen kommen.

Für jede summierbare Reihe, deren Summe nicht unbestimmt unendlich ist, besteht nach Seite 154 die Formel:

$$S = \lim \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n + 1} \quad \text{für} \quad \lim n = \infty.$$

Aber die Umkehrung ist nicht richtig, z. B. die Reihen:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots, \quad 1 + 1 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{3}{4} + 1 - \tfrac{7}{8} + \ldots$$

liefern die Grenzwerte:

$$\lim \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n + 1} = \tfrac{1}{2} \text{ resp. } \tfrac{5}{2},$$

ohne summierbar zu sein.

Die Reihen mit endlicher Summe heissen konvergent, die Reihen ohne Summe oder mit unendlicher Summe divergent. Bei Untersuchung der Konvergenz darf man Glieder in endlicher Menge fortlassen oder zusetzen; wenn daher etwa die negativen Glieder in begrenzter Anzahl auftreten, so braucht man nur die Reihe der

* Soll die Summe unbestimmt unendlich werden, so müssen positive und negative Glieder von beliebig grossem Betrage vorkommen.

positiven Glieder zu prüfen. In jeder konvergenten Reihe ist $\lim a_n = 0$. Das Umgekehrte ist nicht notwendig, z. B. für $-1 < m < 0$ erfüllt die Reihe

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \dots$$

die Bedingung $\lim a_n = 0$ und hat doch die Summe $\infty$. Aber so oft $\lim a_n = 0$ ist, muss in der Reihe ein grösstes positives und ein kleinstes negatives Glied, mithin auch ein Glied von grösstem Betrage vorkommen.[1]

*Aus unendlich vielen positiven Zahlen $u_0, u_1, u_2, \dots$, welche dem Grenzwerte Null zustreben, die aber zugleich der Grösse nach geordnet erscheinen, kann man allemal eine konvergente Reihe herstellen, indem man dieselben mit abwechselnden Vorzeichen versieht, also*

$$u_0 - u_1 + u_2 - \dots \quad \textit{oder} \quad -u_0 + u_1 - u_2 + \dots$$

Beweis: Wir nehmen die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig und $m$ so gross, dass $u_m < \varepsilon$. Da für $n > m$ in beiden Reihen

$$u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^q u_{n+q} = \pm (s_{n+q} - s_n)$$
$$= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \dots,$$
$$0 < \operatorname{abs}(s_{n+q} - s_n) < u_{n+1} < u_n < \varepsilon,$$

so strebt $s_n$ immer einem endlichen Grenzwerte zu (§ 9 Seite 45 flg.). — Das Zeichen der Reihensumme ist das des ersten Gliedes, und man bemerkt überdies, dass $s_n$ die Summe mit einem Fehler darstellt, dessen Betrag kleiner ist als $u_{n+1}$.

Beispiele: In der aus Binomialkoefficienten gebildeten Reihe

$$1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \dots$$

haben die Glieder, von einer gewissen Stelle an, abwechselnde Zeichen und für $m > -1$ abnehmende Beträge mit der unteren Grenze Null; die Reihe konvergiert also nicht bloss für $m > 0$, sondern auch für $-1 < m < 0$.

Die zweite Reihe, welche wir oben für log 2 erhielten, lautet:

$$\log 2 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots$$

Durch Zusammenfassung von Gliedern und Addition zweier Reihen folgert man:

[1] Überhaupt, wenn $a_n$ einen endlichen Grenzwert für $\lim n = \infty$ besitzt, so bewegt sich $a_n$ zwischen endlichen Grenzen.

$$\log 2 = \left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8}\right) + \ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}\log 2 = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8}\right) + \ldots,$$
$$\tfrac{3}{2}\log 2 = \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \ldots$$

Hier darf man aber die Klammern fortlassen. In der That ist

$$\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} > \frac{2}{4m} > \frac{1}{4m+1} + \frac{1}{4m+3},$$

und mithin bestehen nach den vorausgeschickten Sätzen noch die konvergenten Entwickelungen

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2}\log 2 &= \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3}\right) - \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}\right) - \tfrac{1}{4} + \ldots\\ &= \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \ldots\end{aligned}$$

Man sieht nun sofort,* dass die letzte Reihe, obwohl sie nicht $\log 2$ darstellt, doch aus denselben Gliedern besteht, wie die zum Ausgangspunkt genommene Entwickelung von $\log 2$, nur in anderer Reihenfolge, nämlich aus den Gliedern

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{5},\ \ldots \text{ und } -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4},\ -\tfrac{1}{6},\ \ldots$$

Die nämliche Beobachtung macht man an der Reihe

$$\log k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} + \ldots,$$

welche für alle Werte der positiven ganzen Zahl $k$ aus denselben, allerdings verschieden geordneten Gliedern

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots \text{ und } -1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{3},\ \ldots$$

besteht und je nach der Anordnung dieser Glieder die Summe 0, $\log 2$, $\log 3$, ... ergiebt.

Aus der konvergenten Reihe (deren Summe $A$ heisse)

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

in Verbindung mit einer Bemerkung auf Seite 152 folgert man:

$$\begin{aligned}A = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)&\\ + \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{12}}\right) + \ldots&,\end{aligned}$$

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}}\right) + \ldots,$$

$$+\infty = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \ldots$$

Durch Addition dieser Reihen entsteht:

* Dirichlet, Abh. d. Berl. Akad. vom Jahre 1837, S. 49.

$$+\infty = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots,$$

also eine divergente Reihe,* welche, wie die gegebene, aus den Gliedern

$$1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots \text{ und } \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{4}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \dots$$

zusammengesetzt ist. Die Summe einer unendlichen Reihe, welche sowohl positive als auch negative Glieder in unendlicher Menge umfasst, verhält sich hiernach nicht notwendig ebenso, wie eine gewöhnliche Summe, indem die Reihenfolge der Summanden auf den Wert der Summe und auf die Konvergenz nicht ohne Einfluss zu sein braucht.** Um diesen Gegenstand genau zu erörtern, müssen wir die positiven Glieder von den negativen trennen.

Es seien in der Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ unendlich viele positive Glieder $p_0, p_1, p_2, \dots$ und unendlich viele negative $-q_0, -q_1, -q_2, \dots$ vorhanden; man setze

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots = P, \quad q_0 + q_1 + q_2 + \dots = Q.$$

Ist $P = \infty$ und $Q$ endlich, so kommt $S = +\infty$; denn wie gross auch $\varrho > 0$ sei, immer kann man $m$ so gross wählen, dass für alle $n > m$ die Summe der in $s_n$ auftretenden positiven Glieder $> \varrho + Q$, mithin $s_n > \varrho$ wird. Ist $Q = \infty$ und $P$ endlich, so kommt $S = -\infty$. In beiden Fällen divergiert die vorgelegte Reihe; sie kann also nur konvergieren, wenn $P$ und $Q$ zugleich endlich oder unendlich sind. Im ersten Falle ist in der That bei jeder Anordnung der Glieder

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = P - Q;$$

denn wie klein auch $\varepsilon > 0$ sei, immer kann man $m$ so gross machen, dass für alle $n > m$ in $s_n$ die Summe $p$ der positiven Glieder $> P - \varepsilon$ und der Betrag $q$ der Summe der negativen Glieder $> Q - \varepsilon$ ausfällt, dass also $s_n = p - q$ und

$$0 < P - p < \varepsilon, \quad 0 < Q - q < \varepsilon,$$

$$\operatorname{abs}(P - Q - s_n) = \operatorname{abs}[P - p - (Q - q)] < \varepsilon.$$

Im zweiten Falle wird zur Konvergenz jedenfalls die Bedingung $\lim a_n = 0$, d. i. $\lim p_n = \lim q_n = 0$, erforderlich sein; dass aber dann die Reihe bei geeigneter Anordnung der Glieder konvergiert, geht aus dem folgenden Satze hervor:***

---

* Dirichlet a. a. O.

** Zuerst von Dirichlet bemerkt, a. a. O. S. 48.

*** Riemann, Gesammelte Werke S. 221.

*Wenn in einer unendlichen Reihe sowohl die positiven als auch die negativen Glieder divergente Reihen bilden, dabei aber für unendlich grosse Indices unendlich klein werden, so wird die vorgelegte Reihe bei passender Anordnung ihrer Glieder konvergent, und man kann sogar jeden gegebenen endlichen Summenwert hervorbringen.* Um die beliebige endliche Summe $S$ zu erzeugen, nimmt man irgend welche positive Glieder, deren Summe $u_0$ sei, hierauf negative Glieder, bis die Summe $u_0 - u_1$ eben unter $S$ sinkt, dann positive, bis die Summe $u_0 - u_1 + u_2$ eben über $S$ steigt, hierauf wieder negative Glieder, bis die Summe $u_0 - u_1 + u_2 - u_3$ eben unter $S$ sinkt, u. s. w.*

Beweis: Setzt man $u_0 - u_1 + \ldots + (-1)^n u_n = t_n$, so ist bloss zu zeigen, dass $\lim t_n = S$, da $u_0, u_1, u_2, \ldots$ in positive Addenden zerlegt werden dürfen. Wir wollen nun unter $a_\mu$ das letzte Glied der Reihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ verstehen, welches in $t_n$, also in $\pm u_n$ vorkommt; $\mu$ ist mindestens gleich $\frac{1}{2} n$ resp. $\frac{1}{2}(n-1)$. Bei positivem $a_\mu$ hat man:

$$t_n - a_\mu < S, \quad t_n > S, \quad 0 < t_n - S < a_\mu$$

und bei negativem $a_\mu$:

$$t_n - a_\mu \geqq S, \quad t_n < S, \quad 0 < S - t_n \leqq -a_\mu.$$

Der Betrag von $t_n - S$ überschreitet also niemals den von $a_\mu$. Mit $n$ nimmt $\mu$ endlos zu, der Betrag von $a_\mu$ endlos ab, umsomehr der Betrag von $t_n - S$.

Man unterscheidet unbedingte und bedingte Konvergenz. **Unbedingt konvergente** Reihen haben den Charakter der gewöhnlichen Summen; die Anordnung der Glieder übt auf die Summe keinen Einfluss aus. Die notwendige und hinreichende Bedingung dieser Konvergenz besteht darin, dass die Reihen $p_0 + p_1 + \ldots$ und $q_0 + q_1 + \ldots$ (wenn überhaupt beide unendlich viele Glieder enthalten) einzeln konvergieren müssen; es geben dann sowohl die positiven als auch die negativen Glieder endliche Summen, resp. $P$ und $-Q$, durch deren Vereinigung man die Summe $P - Q$ der ganzen Reihe

* Man kann die Glieder auch so anordnen, dass sie eine unendliche Summe geben, die jedoch nach Seite 160 bestimmt unendlich sein muss; in der That findet man durch Addition aus

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots, \quad + \infty = u_0 + u_2 + \ldots$$

die mit den Gliedern $2p_0, 2p_1, \ldots$ und $-q_0, -q_1, \ldots$ gebildete Reihe

$$2u_0 - u_1 + 2u_2 - u_3 + 2u_4 - u_5 + \ldots = + \infty.$$

Um eine Reihe ohne Summe herzustellen, nehme man positive Glieder, bis die Summe über die positive Zahl $A$ steigt, dann negative, bis die Summe unter $-A$ sinkt, u. s. w.

erhält. Wenn eine der beiden Reihen $p_0 + \dots$ und $q_0 + \dots$ konvergiert, die andere divergiert, so divergiert zwar die ganze Reihe, hat aber eine Summe, nämlich wieder $P - Q$, also $+\infty$ oder $-\infty$. Wenn hingegen eine endliche Summe existiert, während die Reihen $p_0 + \dots$ und $q_0 + \dots$ einzeln divergieren, so sagt man, dass die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ bei der gegebenen Anordnung gegen die Summe $S$ bedingt konvergiert. Man darf dann die Glieder nicht beliebig anordnen, die Summe wird nicht durch $P - Q$ dargestellt.

*Wenn die aus den absoluten Beträgen der Glieder gebildete Reihe*

$$p_0 + q_0 + p_1 + q_1 + \dots = \operatorname{abs} a_0 + \operatorname{abs} a_1 + \dots$$

*konvergiert, so ist die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ ebenfalls konvergent, und zwar unbedingt konvergent;* denn dann ist die Summe $P + Q$ endlich, folglich sind $P$ und $Q$ selbst endlich. Umgekehrt: *Wenn die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ unbedingt konvergiert, so ist auch die Reihe der absoluten Beträge konvergent;* denn dann sind $P$ und $Q$ endlich, folglich auch die Summe $P + Q$. In jeder divergenten oder nur bedingt konvergenten Reihe ist die Summe der Beträge der Glieder unendlich. Eine bei jeder Anordnung divergierende Reihe kann man unbedingt divergent, dagegen eine in der vorgelegten Anordnung, aber nicht bei jeder anderen divergierende Reihe bedingt divergent nennen. Die Reihen, welche $P = Q = \infty$, aber nicht $\lim a_n = 0$ geben, sind unbedingt divergent; ebenso die Reihen, welche $P = \infty$ und $Q$ endlich, oder $Q = \infty$ und $P$ endlich geben.

Beispiele: Für $m > 0$ sind die beiden Reihen

$$1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots, \quad 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots$$

unbedingt konvergent, für $-1 < m < 0$ ist die erste bedingt konvergent, die zweite unbedingt divergent, für $m < -1$ sind beide Reihen unbedingt divergent. Die Reihen (§ 24 Seite 156)

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

sind für alle endlichen $x$ unbedingt konvergent (beständig konvergent). Die Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

ist unbedingt konvergent für abs $x < 1$, unbedingt divergent für $x = -1$ und für abs $x > 1$; für $x = 1$ kommt:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2.$$

Schliesslich sei noch eine Reihe angeführt, welche für abs $x < 1$ unbedingt konvergiert, für abs $x > 1$ unbedingt divergiert, für $x = \pm 1$ bedingt konvergiert:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

*In jeder konvergenten Reihe, deren Glieder nicht einerlei Zeichen besitzen, ist wie bei gewöhnlichen Summen:*

$$\text{abs } S < \text{abs } a_0 + \text{abs } a_1 + \text{abs } a_2 + \ldots$$

Denn bei bedingter Konvergenz ist $S$ endlich, $P + Q$ unendlich, und bei unbedingter ist abs $(P - Q) < P + Q$.

In jeder konvergenten Reihe kann man, wie klein auch $\varepsilon > 0$ angenommen werde, stets $m$ so gross wählen, dass für $n > m$

$$\text{abs}\,(s_n - S) = \text{abs}\,(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ausfällt; es wird dann für $n \geq m$ auch

$$\text{abs}\,(s_{n+q} - s_n) = \text{abs}\,(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+q}) < \varepsilon,$$

also insbesondere

$$\text{abs } a_{m+1} < \varepsilon, \quad \text{abs}\,(a_{m+1} + a_{m+2}) < \varepsilon,$$
$$\text{abs}\,(a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3}) < \varepsilon \quad \text{u. s. w.}$$

Alles dies drückt nur aus, dass die Summe der Reihe mit beliebiger Genauigkeit dargestellt wird durch die Summe einer hinreichend grossen Anzahl von aufeinanderfolgenden Gliedern. Für unbedingt konvergente Reihen jedoch, überhaupt für Reihen mit endlicher oder unendlicher, aber von der Anordnung der Glieder unabhängiger Summe gilt noch mehr: *Aus einer solchen Reihe kann man Glieder in endlicher Menge derart herausheben, dass ihre Summe in beliebig vorgeschriebener Nähe bei $S$ liegt, und dass die verlangte Annäherung fortdauert, wenn man noch Glieder aus dem Rest hinzunimmt* (Weierstrass).

Beweis: Bei endlichem $S$ sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein; entnimmt man aus $p_0 + \ldots$ und $q_0 + \ldots$ die Partialsummen $p > P - \varepsilon$ und $q > Q - \varepsilon$, so ist $s = p - q$ eine Partialsumme aus $a_0 + \ldots$ und abs $(s - S) < \varepsilon$; fügt man zu $s$ noch andere Glieder hinzu, so können $p$ und $q$ nicht abnehmen, und die durch $\varepsilon$ definierte Annäherung bleibt bestehen. Bei unendlichem $S$, etwa $S = +\infty$, sei $\varrho > 0$ beliebig gross; entnimmt man aus $p_0 + \dots$ die Partialsumme $p' > Q + \varrho$ und aus $q_0 + \dots$ irgend eine die Glieder von $p'$ enthaltende Partialsumme $s = p - q$, so ist $s > p' - Q > \varrho$.

Die im vorigen Paragraphen besprochenen Konvergenzkriterien dienen jetzt zur Beurteilung der unbedingten Konvergenz. Wenn die Glieder der Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ dem Betrage nach die entsprechenden Glieder einer unbedingt konvergenten Reihe $u_0 + u_1 + \dots$ nicht übersteigen, so ist auch die erste Reihe unbedingt konvergent. Wenn die Reihe $u_0 + u_1 + \dots$ unbedingt konvergiert und die Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots$ sich zwischen endlichen Grenzen bewegen, so ist auch die Reihe

$$\varrho_0 u_0 + \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2 + \dots$$

unbedingt konvergent. Wenn die obere Grenze der Beträge von

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

unter der Eins liegt, also z. B. wenn $q_n$ für $\lim n = \infty$ einem dem Betrage nach unter der Eins gelegenen Grenzwerte zustrebt, so konvergiert die Reihe $a_0 + a_1 + \dots$ unbedingt; wenn die untere Grenze von abs $q_n$ über der Eins liegt, also z. B. wenn $q_n$ einem dem Betrage nach über der Eins gelegenen Grenzwerte zustrebt, so divergiert die Reihe unbedingt.

Z. B.: In der sogenannten Binomialreihe

$$1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots$$

ist, wenn positive ganze $m$ ausgeschlossen werden:

$$q_n = -\frac{m-n}{n+1} x, \quad \lim q_n = -x;$$

daher ist die Reihe für abs $x < 1$ unbedingt konvergent, für abs $x > 1$ unbedingt divergent; für $x = \pm 1$ und $m > 0$ ist sie unbedingt konvergent, für $x = 1$ und $-1 < m < 0$ bedingt konvergent, für $x = 1$ und $m < -1$, sowie für $x = -1$ und $m < 0$ unbedingt divergent. Die Reihe

$$1 + 1 . x + 1 . 2 . x^2 + 1 . 2 . 3 . x^3 + \dots$$

ist (ausser bei $x = 0$) unbedingt divergent, da für abs $x > 0$

$$q_n = (n+1) x, \quad \lim q_n = \infty.$$

Wenn in einer bedingt konvergenten Reihe $q_n$ einen Grenzwert hat, so ist der Betrag desselben $= 1$; es kann aber $q_n$ beliebige Schwankungen erleiden, wie an den oben angeführten Reihen wahrzunehmen ist, z. B.

$$\log 2 = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \ldots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3} + \ldots$$

Zwei konvergente unendliche Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = S, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots = T$$

geben als Summe die unendliche Reihe

$$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \ldots = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots = S + T.$$

Setzt man in der That $b_0 + b_1 + \ldots + b_n = t_n$, so streben $s_n + t_{n-1}$ und $s_n + t_n$ dem Grenzwerte $S + T$ zu. Waren die gegebenen Reihen unbedingt konvergent, so wird es auch die neue Reihe (§ 24 Seite 157). — Das Entsprechende gilt für die Differenz zweier, sowie für die Summe beliebig vieler (aber nicht unendlich vieler) konvergenten Reihen.

Zwei konvergente unendliche Reihen $a_0 + \ldots = S$, $b_0 + \ldots = T$ geben als Produkt die unendliche Reihe

$$ST = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1) + (a_2 b_0 + a_0 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2) + \ldots$$

(vergl. § 24 Seite 157). Sind die gegebenen Reihen unbedingt konvergent, so gilt dies auch von der neuen Reihe; es gelten dann überdies die folgenden unbedingt konvergenten Entwickelungen:*

$$\begin{aligned} ST &= a_0 b_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0 + \ldots \\ &\quad + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + \ldots \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \ldots \end{aligned}$$

Z. B.: Das Produkt der Reihen

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots, \quad \eta = 1 + \frac{\xi}{1} + \frac{\xi^2}{1.2} + \ldots$$

wird nach der letzten Formel:

$$y\eta = 1 + \frac{x + \xi}{1} + \frac{(x + \xi)^2}{1.2} + \ldots,$$

hat also für $\xi = -x$ den Wert 1. Das Quadrat der Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ wird nach derselben Formel:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots \quad \text{für} \quad -1 < x < 1.$$

Zum Schluss sind noch einige Bemerkungen zu machen, die im folgenden Paragraphen zur Anwendung kommen.

---

* Eine Ergänzung dieser Regel folgt unten in § 26 (S. 176).

Bezeichnet man mit $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ positive abnehmende Grössen, mit $t_n$ die Summe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n$$

und mit $N$ die obere Grenze der Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots$, so ist $t_n < \varepsilon_0 N$.* Man hat in der That:

$$\begin{aligned} t_n &= \varepsilon_0 s_0 + \varepsilon_1 (s_1 - s_0) + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \ldots + \varepsilon_n (s_n - s_{n-1}) \\ &= (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) s_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) s_{n-1} + \varepsilon_n s_n \\ &< (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) N + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) N + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) N + \varepsilon_n N \quad \text{d. i.} \quad \varepsilon_0 N. \end{aligned}$$

In gleicher Weise findet man, wenn $M$ die untere Grenze der Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ und $R$ die obere Grenze der Beträge bedeutet:

$$t_n > \varepsilon_0 M, \quad M < \frac{t_n}{\varepsilon} < N, \quad \text{abs}\, t_n < \varepsilon_0 R.$$

Die untere Grenze $\eta$ der Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ ist zugleich der Grenzwert von $\varepsilon_n$ für $\lim n = \infty$; daher ist die aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzte Reihe

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots$$

konvergent und hat die Summe $\varepsilon_0 - \eta$. Ist nun die Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ konvergent und $S$ ihre Summe, so bewegen sich $s_0, s_1, s_2, \ldots$ zwischen endlichen Grenzen (Seite 161), und auch die Reihe

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) s_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) s_2 + \ldots$$

konvergiert dann (unbedingt) gegen eine zwischen $M(\varepsilon_0 - \eta)$ und $N(\varepsilon_0 - \eta)$ eingeschlossene Summe $U$. Die Summe der $n+1$ ersten Glieder der letzten Reihe ist aber gleich der Differenz $t_n - \varepsilon_{n+1} s_n$, folglich hat man:

$$U + \eta S = \lim t_n \quad \text{für} \quad \lim n = \infty,$$

d. h. die Reihe $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots$ konvergiert gegen eine zwischen $\varepsilon_0 M + \eta (S - M)$ und $\varepsilon_0 N - \eta (N - S)$ eingeschlossene Summe.

*Bildet man aus unendlich vielen positiven abnehmenden Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und den Gliedern der konvergenten Reihe $a_0 + a_1 + \ldots = S$ die neue Reihe*

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots,$$

*so ist auch diese konvergent; ihre Summe liegt zwischen $\varepsilon_0 M$ und $\varepsilon_0 N$ und ist also dem Betrage nach kleiner als $\varepsilon_0 R$,* wo $M$, $N$, $R$ die oben angegebene Bedeutung haben.

---

* Abel, Oeuvres complètes (II. éd.) T. 1 p 222.

## § 26. Potenzreihen.

Wenn die Glieder einer konvergenten unendlichen Reihe von einer Veränderlichen $x$ abhängen, so ist die Summe der Reihe im allgemeinen ebenfalls von $x$ abhängig, eine Funktion von $x$. Eine solche Reihe wird eine Potenzreihe genannt, wenn jedes Glied durch Multiplikation einer Potenz von $x$ mit einer Konstanten entsteht. Wir ziehen hier nur die gewöhnlichen Potenzreihen in Betracht, d. h. diejenigen, welche nach positiven ganzen Potenzen der Variablen fortschreiten; Reihen dieser Art sind bereits mehrfach vorgekommen.

Mit $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... sollen unendlich viele konstante (endliche) Grössen, mit $s_n$ die Summe $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ bezeichnet werden. Bildet man nun die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

so konvergiert diese sicher bei $x = 0$, aber es ist nicht nötig, dass sie bei irgend einem andern Werte von $x$ konvergiert, wie das auf Seite 167 angeführte Beispiel lehrt. Giebt es jedoch einen von Null verschiedenen Wert $x_0$ der Independenten, bei welchem die Reihe konvergiert, so ist die letztere unbedingt konvergent für abs $x <$ abs $x_0$; denn für alle $x$ zwischen $x_0$ und $-x_0$ ist die Reihe

$$1 + \frac{x}{x_0} + \frac{x^2}{x_0{}^2} + \frac{x^3}{x_0{}^3} + \cdots$$

unbedingt konvergent, und die Grössen $a_0$, $a_1 x_0$, $a_2 x_0{}^2$, ... bewegen sich zwischen endlichen Grenzen. Die Moduln aller Werte von $x$, bei denen die Reihe konvergiert, bilden daher eine stetige Folge mit der unteren Grenze Null; die obere Grenze werde mit $r$ bezeichnet. Da zu jedem $x$ zwischen $-r$ und $r$ sich ein Wert $x_0$ angeben lässt, dessen Betrag zwischen $r$ und abs $x$ liegt, und bei welchem die Reihe konvergiert, so findet bei jenem $x$ unbedingte Konvergenz statt; dagegen ist die Reihe für abs $x > r$ unbedingt divergent.

*Zu jeder Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, welche nicht bloss bei $x = 0$ konvergiert, gehört eine bestimmte positive Zahl $r$ von der Beschaffenheit, dass die Reihe für alle zwischen $-r$ und $r$ gelegenen $x$ unbedingt konvergiert, für alle unter $-r$ oder über $+r$ gelegenen $x$ unbedingt divergiert.*

Beispiele hierfür sind im vorigen Paragraphen zu finden. Wenn die Reihe beständig (d. h. für alle endlichen $x$) konvergiert, so ist $r = \infty$. Hat $r$ einen endlichen Wert, so findet bei $x = r$ bald Konvergenz, bald Divergenz statt, ebenso bei $x = -r$; ist die Reihe an einer der beiden Grenzen unbedingt konvergent, so ist sie es auch an der andern.

Die Werte von $x$, bei denen die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ konvergiert, bilden eine stetige Folge, deren Grenzen nicht immer mitzurechnen sind, und welche das Konvergenzgebiet der Reihe genannt wird. Sobald $x_0$ zum Konvergenzgebiete gehört, besitzen die Beträge der Glieder $a_0$, $a_1 x_0$, $a_2 x_0^2$, ... eine endliche obere Grenze. Liegt dagegen $x_0$ weder innerhalb noch an der Grenze des Konvergenzgebietes, so wachsen die Beträge jener Glieder unbegrenzt; mit anderen Worten: *Wenn bei $x = x_0$ die Beträge aller Glieder der Reihe unterhalb einer endlichen Grenze liegen, so ist* abs $x_0 < r$, *d. h. die Reihe konvergiert dann für* abs $x <$ abs $x_0$. In der That hat man:

$$a_1 x = (a_1 x_0) \frac{x}{x_0}, \quad a_2 x^2 = (a_2 x_0^2) \frac{x^2}{x_0^2}, \ \cdots$$

u. s. w.

Wenn daher die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ konvergiert, so ist für abs $x < 1$ nicht bloss die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, sondern auch die Reihe

$$s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$$

unbedingt konvergent.* Überhaupt ist die letztere unbedingt konvergent an allen Stellen, welche zwischen $-1$ und $+1$ und zugleich zwischen den Konvergenzgrenzen der Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ liegen; denn an diesen Stellen erhält man nach § 25 Seite 168:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$$

Umgekehrt ist bei allen $x$, wo die Reihe $s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots$ konvergiert, auch die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ konvergent, und zwar hat man:

$$(1 - x)(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Wird $x$ auf das Konvergenzgebiet der Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ beschränkt und die Summe der Reihe mit $y$ bezeichnet, so können wir $y$ als Funktion von $x$ auffassen;** setzen wir etwa

* Dirichlet, nach einer Mitteilung von Liouville in dessen Journal T. VII ($2^{\text{ième}}$ série) p. 253.

** $y$ ist nur dann konstant, wenn $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ...; s. unten S. 178.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = f(x)$$

und ausserdem zur Abkürzung

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = f_n(x), \quad a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots = \varphi_n(x),$$

so dass $f_n(x)$ eine ganze Funktion $n^{\text{ten}}$ Grades und

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x).$$

Da bei jedem $x$ aus dem Konvergenzgebiete

$$\lim \varphi_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad \lim n = \infty,$$

so wird $y$ bei hinreichend grossem $n$ durch die ganze Funktion $f_n(x)$ mit beliebig kleinem Fehler dargestellt. Die untere Grenze der geeigneten Werte von $n$ erscheint zunächst als eine von $x$ abhängige Zahl: Abel jedoch hat in seiner Abhandlung über die Binomialreihe die Bemerkung gemacht, dass sich ein Index $n$ angeben lässt, welcher für alle zu einer stetigen Folge gehörigen $x$ genügt, um die geforderte Annäherung zu erzielen.[1] Sei etwa $x_0$ ein von Null verschiedener Wert aus dem Konvergenzgebiete und $\varepsilon > 0$ beliebig angenommen; man wähle die positive ganze Zahl $m$ so gross, dass

$$\text{abs}\, \varphi_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad \lim n \geqq m.$$

Wenn $x$ zwischen $0$ und $x_0$ variiert, so hat man:

$$\varphi_n(x) = a_{n+1} x_0^{n+1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+2} + \dots,$$

$$\text{abs}\, \varphi_n(x) < R \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n+1} < R,$$

wo $R$ die obere Grenze der Beträge der Zahlen

$$a_{n+1} x_0^{n+1}, \quad a_{n+1} x_0^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2},$$
$$a_{n+1} x_0^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2} + a_{n+3} x_0^{n+3}, \dots$$

bedeutet (§ 25 am Ende). Alle diese Beträge sind aber kleiner als $\varepsilon$ (§ 25 Seite 166), folglich ist $R < \varepsilon$ und

$$\text{abs}\, \varphi_n(x) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > m,$$

wenn $x$ das Intervall von $0$ bis $x_0$ mit Einschluss der Grenzen durchläuft.

Es seien überhaupt $u_0, u_1, u_2, \dots$ unendlich viele (endliche) Funktionen der Variablen $x$ in einem gewissen Intervall, und die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ daselbst konvergent; wir bezeichnen die Summe der Reihe mit $g(x)$ und setzen

[1] Abel, Oeuvres complètes (II. éd.) T. I p. 223 (dazu Note in T. 2 p. 302). — Vergl. Heine, Kugelfunktionen, 2. Auflage, Bd. II S. 354.

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = g_n(x), \quad g(x) = g_n(x) + \psi_n(x).$$

Zu jedem $x$ aus dem Konvergenzbereiche kann man, wie klein auch $\varepsilon > 0$ gegeben sein mag, eine hinreichend grosse Zahl $m$ bestimmen, so dass bei jenem $x$:

$$\text{abs}\, \psi_n(x) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > m.$$

Betrachten wir nun ein Intervall $(a \ldots b)$, dessen Grenzen im Innern oder an der Begrenzung des Konvergenzbereiches liegen. Unter Umständen ist, wie oben an der Potenzreihe gezeigt wurde, ein Wert $m$ vorhanden, welcher bei allen zum Intervall $(a \ldots b)$ gehörigen $x$ die Eigenschaft besitzt, abs $\psi_n(x) < \varepsilon$ für $n > m$ zu ergeben. In diesem Falle sagt man nach Weierstrass, dass die Reihe $u_0 + u_1 + \ldots$ im Intervall $(a \ldots b)$ gleichmässig konvergiert.* — Ist die Reihe gleichmässig konvergent in einem Intervall, so ist sie es in jedem seiner Teile. Wird ein Intervall in Teile zerlegt, und ist die Reihe in jedem dieser Teile gleichmässig konvergent, so ist sie es auch in dem ganzen Intervall.

Hiernach werden wir, wenn $x_0$ einen positiven, $x_1$ einen negativen Wert aus dem Konvergenzgebiete der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

bedeutet, von dieser sagen, dass sie sowohl für $0 < x < x_0$, als auch für $x_1 < x < 0$ gleichmässig konvergiert; und daraus folgt, dass *die Potenzreihe für $a < x < b$ gleichmässig konvergiert, wo immer $a$ und $b$ im Konvergenzgebiete angenommen werden.* Konvergiert die Reihe für $x = a$ und $x = b$ unbedingt, so ist sie für $a < x < b$ gleichmässig und unbedingt konvergent; in diesem Falle lässt sich der Beweis einfacher führen, indem man die grössere der beiden Zahlen abs $a$, abs $b$ mit $\xi$ bezeichnet, ferner etwa

$$\text{abs}\, a_0 = c_0, \quad \xi\, \text{abs}\, a_1 = c_1, \quad \xi^2\, \text{abs}\, a_2 = c_2, \ldots$$

setzt und beachtet, dass die Reihe $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$ konvergiert, und dass für die in Betracht kommenden $x$ wegen abs $x < \xi$:

$$\text{abs}\,(a_1 x) < c_1, \quad \text{abs}\,(a_2 x^2) < c_2, \ldots$$

Es gilt nämlich der allgemeine Satz:**

* Die Wichtigkeit dieses Begriffes ist zuerst von Seidel dargelegt worden: Abhandlungen der math.-phys. Klasse der bayr. Akad. Bd. V Abth. II (1848) S. 381.

** Weierstrass, Monatsbericht der Berl. Akad. 1880 August; Harnack, Differential- und Integralrechnung S. 233.

*Wenn für alle $x$ in einem gewissen Gebiete die Beträge der Funktionen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die Glieder einer konvergenten unendlichen Reihe von positiven Konstanten $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$ nicht übersteigen, so ist die Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

*in jenem Gebiete gleichmässig und unbedingt konvergent.* Es sei in der That $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; wählt man $m$ so gross, dass

$$c_{m+1} + c_{m+2} + \ldots < \varepsilon$$

ausfällt, so ist für $m < \alpha < \beta < \gamma < \ldots$ bei allen jenen $x$ (vergl. § 25 Seite 166)

$$\begin{aligned} \text{abs}\,(u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \ldots) &< \text{abs}\, u_\alpha + \text{abs}\, u_\beta + \text{abs}\, u_\gamma + \ldots \\ &\leqq c_\alpha + c_\beta + c_\gamma + \ldots < \varepsilon.^* \end{aligned}$$

Die Eigenschaft der Potenzreihe $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, welche jetzt gleichmässige Konvergenz genannt wird, hat Abel (a. a. O.) in Betracht gezogen, um die Stetigkeit der Funktion $y$ zu beweisen. *Sind überhaupt $u_0, u_1, u_2, \ldots$ stetige Funktionen von $x$ in einem Intervall, in welchem die Reihe $g(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ gleichmässig konvergiert, so ist die Funktion $g(x)$ daselbst überall stetig.* Denn es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben und $n$ so gross berechnet, dass in jenem Intervall

$$\text{abs}\, \psi_n(x) < \frac{\varepsilon}{3};$$

wegen der Stetigkeit der Funktion $g_n(x)$ kann man $\delta > 0$ so klein angeben, dass

$$\text{abs}\,[g_n(x_0) - g_n(x_1)] < \frac{\varepsilon}{3},$$

so oft $x_0$ und $x_1$ im Intervall angenommen werden und abs $(x_0 - x_1) < \delta$ ausfällt; da

$$g(x_0) - g(x_1) = [(g_n(x_0) - g_n(x_1)] + \psi_n(x_0) - \psi_n(x_1),$$

$$\text{abs}\, \psi_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{abs}\, \psi_n(x_1) < \frac{\varepsilon}{3},$$

so kommt bei der angegebenen Lage von $x_0$ und $x_1$:

$$\text{abs}\,[g(x_0) - g(x_1)] < \varepsilon.$$

*Demnach stellt die konvergente Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ in der ganzen Ausdehnung ihres Konvergenzbereiches eine eindeutige, end-*

* Wenn die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ in einem Gebiete gleichmässig und unbedingt konvergiert, so ist daselbst auch die Reihe der Beträge gleichmässig konvergent.

*liche und stetige Funktion von $x$ dar.** Diese Funktion ist gleichmässig stetig in jedem Intervall, an dessen Grenzen die Reihe konvergiert. Ist die Reihe beständig konvergent, so ist sie in jedem endlichen Intervall gleichmässig konvergent und stellt darin eine gleichmässig stetige Funktion dar.

Wenn die Reihe $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots$ konvergiert, so ist

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots = \lim (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \quad \text{für} \quad \lim x = x_0.$$

Insbesondere wenn die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ konvergiert, so ist

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \lim (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \quad \text{für} \quad \lim x = 1.\text{**}$$

Sind zwei nicht bloss bei $x = 0$ konvergierende Potenzreihen gegeben:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

so wird man bei gleichzeitiger Betrachtung derselben sich auf diejenigen $x$ beschränken, für welche beide Reihen konvergieren. Die Summe beider Reihen erscheint wieder als Potenzreihe:

$$f(x) + h(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \ldots,$$

ebenso die Differenz. Das Produkt kann sofort als Potenzreihe geschrieben werden an allen Stellen, wo beide Reihen unbedingt konvergieren, also jedenfalls zwischen den Grenzen des Intervalles:

$$f(x)\, h(x) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \ldots$$

(§ 25 Seite 168). Diese Entwickelung ist aber an den Grenzen des Intervalles nicht immer statthaft, wenn eine der beiden Reihen nur bedingt konvergiert; indessen bleibt sie giltig, wenn die drei Reihen

$$a_0 + a_1 x + \ldots, \quad b_0 + b_1 x + \ldots, \quad a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + \ldots$$

gleichzeitig konvergieren, da alsdann für $\lim X = x$:

$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + \ldots = \lim [a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) X + \ldots],$$
$$f(x)\, h(x) = \lim f(X)\, h(X), \quad f(X)\, h(X) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) X + \ldots$$

Hieraus ergiebt sich ein von Abel (a. a. O. Seite 226) aufgestellter Satz, durch welchen die in § 25 gegebene Multiplikationsregel ergänzt wird:

---

* Für die Stetigkeit der Potenzreihe hat Dirichlet noch einen andern Beweis angegeben, den Liouville a. a. O. mitteilt. Vergl. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen S. 48.

** Eine Verallgemeinerung dieses Satzes hat Frobenius angegeben: Crelles Journal Bd. 89 S. 262.

*Wenn die drei Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots, \quad b_0 + b_1 + b_2 + \ldots,$$
$$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \ldots$$

*konvergieren, so ist*

$$(a_0 + a_1 + \ldots)(b_0 + b_1 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \ldots$$

Die Stetigkeit der Potenzreihe setzt uns in den Stand, zu beurteilen, ob zwei Reihen $a_0 + a_1 x + \ldots$, $b_0 + b_1 x + \ldots$ mit verschiedenen Koefficienten eine und dieselbe Funktion darstellen können. Wir beweisen zuerst den Satz: Soll die Reihe $a_0 + a_1 x + \ldots$ in einem die Null enthaltenden Intervalle fortwährend die Summe Null besitzen, so müssen alle Koefficienten verschwinden. In der That ergiebt sich zunächst:

$$a_0 = f(0) = 0, \quad \text{also} \quad f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots;$$

sehen wir daher von dem Werte $x = 0$ ab, so kommt:

$$a_1 + a_2 x + \ldots = \frac{f(x)}{x} = 0,$$

aber zugleich wird

$$a_1 = \lim (a_1 + a_2 x + \ldots) \text{ für } \lim x = 0, \quad \text{also } a_1 = 0,$$

d. h. auch die Reihe $a_1 + a_2 x + \ldots$ giebt in jenem Intervalle fortwährend die Summe Null, ebenso die Reihe $a_2 + a_3 x + \ldots$ u. s. w — Hieraus folgt:

Sollen die Reihen $a_0 + a_1 x + \ldots$, $b_0 + b_1 x + \ldots$ in einem die Null enthaltenden Intervalle fortwährend dieselbe Summe besitzen, so müssen alle Koefficienten übereinstimmen. Denn dann ist in jenem Intervalle

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \ldots = 0,$$

folglich $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 = b_1 = 0$ u. s. f.

Beide Sätze werden sich auf andere Intervalle übertragen lassen. Zuvor müssen wir zeigen, wie für jeden zwischen den Konvergenzgrenzen gelegenen Wert von $x$ der Ausdruck

Fig. 56.


$$f(x+h) = a_0 + a_1 (x+h) + a_2 (x+h)^2 + \ldots$$

nach Potenzen von $x$ entwickelt wird. Es sei der Kürze halber

$$\text{abs } a_0 = \alpha_0, \quad \text{abs } a_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \text{abs } x = \xi, \quad \text{abs } h = \eta.$$

Solange $\xi + \eta < r$, d. h.

$$\text{abs } h < r - \text{abs } x,$$

konvergiert die Reihe $\alpha_0 + \alpha_1 (\xi + \eta) + \ldots$ unbedingt, folglich auch

$$\begin{aligned} &\alpha_0 + \alpha_1(\xi+\eta) + \alpha_2(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) + \alpha_3(\xi^3 + 3\xi^2\eta + 3\xi\eta^2 + \eta^3) + \ldots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \alpha_3\xi^3 + \ldots \\ &+ \alpha_1\eta + 2\alpha_2\xi\eta + 3\alpha_3\xi^2\eta + 4\alpha_4\xi^3\eta + \ldots \\ &+ \alpha_2\eta^2 + 3\alpha_3\xi\eta^2 + 6\alpha_4\xi^2\eta^2 + 10\alpha_5\xi^3\eta^2 + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und mit dieser die Reihe

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ &+ a_1 h + 2a_2 xh + 3a_3 x^2 h + 4a_4 x^3 h + \ldots \\ &+ a_2 h^2 + 3a_3 xh^2 + 6a_4 x^2 h^2 + 10 a_5 x^3 h^2 + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

deren Summe $f(x+h)$ darstellt, die sich aber auch in

$$y + u_1 h + u_2 h^2 + u_3 h^3 + \ldots$$

zusammenziehen lässt, wo $u_1, u_2, u_3, \ldots$ zwischen $-r$ und $r$ bestimmte Funktionen von $x$ bedeuten, definiert durch die daselbst unbedingt konvergierenden Potenzreihen:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots, \\ u_2 &= a_2 + 3a_3 x + 6a_4 x^2 + 10 a_5 x^3 + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. Von der hiermit erlangten Entwickelung

$$f(x+h) = y + u_1 h + u_2 h^2 + u_3 h^3 + \ldots$$

wissen wir aus der Herleitung, dass sie unbedingt konvergiert, solange $x+h$ bei $x$ näher bleibt, als der nähere der beiden Werte $r$ und $-r$; daraus folgt aber nicht, dass sie in jedem Falle für alle anderen Lagen von $x+h$ divergiert. — War die Reihe $a_0 + a_1 x + \ldots$ beständig konvergent, so ist es die Reihe für $f(x+h)$ ebenfalls.

Dieses Ergebnis mag sofort benutzt werden, um folgenden Satz zu beweisen: *Sollen die Reihen*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

*in irgend einem Intervalle fortwährend dieselbe Summe besitzen, so müssen alle Koefficienten übereinstimmen.* Oder: Soll die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ in irgend einem Intervalle fortwährend die Summe Null besitzen, so müssen alle Koefficienten verschwinden.

Fig. 57.


Beweis der zweiten Aussage: Es handelt sich nur um ein Intervall, welches die Null nicht umgiebt, also etwa um positive

Werte; die untere Grenze nennen wir $a$ und nehmen an, dass man sie möglichst weit zurückgeschoben hat. Alsdann ist $f(a) = \lim f(x)$ für $\lim x = a + 0$, also $f(a) = 0$; ferner hat man für $\operatorname{abs} h < r - a$, d. h. für $2a - r < a + h < r$, eine Entwickelung von der Form:

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots,$$

welche für hinreichend kleine $h > 0$ die Summe Null giebt. Folglich ist $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, ..., weiter $f(x) = 0$ für $2a - r < x < a$. Daraus folgt aber $a = 0$ u. s. w.

Hiernach kann man eine und dieselbe Funktion von $x$ in keinem Intervalle auf mehr als eine Art nach positiven ganzen Potenzen von $x$ entwickeln. Insbesondere kann die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ in keinem Intervalle eine konstante Summe besitzen, ausser wenn $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ...

Für alle $x$ zwischen $-r$ und $r$ konnte der Ausdruck $f(x+h)$ bei hinreichend kleinem $\operatorname{abs} h$ nach positiven ganzen Potenzen von $h$ entwickelt werden. Sieht man von dem Werte $h = 0$ ab, so wird

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = u_1 + u_2 h + u_3 h^2 + \ldots,$$

und daraus folgt:

$$u_1 = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für} \quad \lim h = 0,$$

d. h. die Funktion $y = a_0 + a_1 x + \ldots$ ist für alle $x$ zwischen $-r$ und $r$ differentiierbar in Bezug auf $x$. Da

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$$

so erkennt man, dass die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + \ldots$ nach $x$ differentiiert wird, indem man ihre Glieder nach $x$ differentiiert.

Die Konvergenz der neuen Reihe zwischen $-r$ und $r$ ergiebt sich auch direkt aus der Konvergenz der beiden Reihen

$$a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2 + a_4 x_0^3 + \ldots,$$

$$1 + 2\frac{x}{x_0} + 3\frac{x^2}{x_0^2} + 4\frac{x^3}{x_0^3} + \ldots,$$

wo man $\operatorname{abs} x < r$ und $x_0$ zwischen $r$ und $\operatorname{abs} x$ anzunehmen hat. Für $\operatorname{abs} x > r$ divergiert die neue Reihe unbedingt, da alsdann (Seite 171) die Beträge der Grössen $a_n x^n$ und umsomehr die Beträge der Grössen $n a_n x^{n-1}$ über alle Grenzen wachsen. Aber an den Grenzen des Konvergenzgebietes wird die abgeleitete Reihe bald konvergieren, bald divergieren. Z. B.: Aus der Reihe

$$1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\binom{m}{3}x^3+\dots$$

entsteht durch Differentiation der Glieder die folgende:

$$m\left\{1+\binom{m-1}{1}x+\binom{m-1}{2}x^2+\dots\right\},$$

und während (§ 25 Seite 167) für $m>0$ beide Reihen bei $x=1$ konvergieren, so ist für $-1<m<0$ die erste Reihe bei $x=1$ konvergent, die zweite divergent. *Überall wo die abgeleitete Reihe $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots$ konvergiert, konvergiert auch die ursprüngliche Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ und besitzt einen Differentialquotienten, welcher durch die erstere dargestellt wird.* Die Konvergenz ergiebt sich aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen, das Übrige aus § 15 Seite 84.*

Die durch die Potenzreihe $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ dargestellte Funktion $y$ der Variablen $x$ ist in der ganzen Ausdehnung des Konvergenzgebietes integrierbar. In der That konvergiert die Reihe

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\dots$$

überall, wo jene konvergiert, und stellt eine Stammfunktion von $y$ dar, so dass zwischen beliebigen zum Konvergenzgebiete gehörigen Grenzen

$$\int_a^b y\,dx=a_0(b-a)+\frac{a_1}{2}(b^2-a^2)+\frac{a_2}{3}(b^3-a^3)+\dots,$$

d. h. die Potenzreihe $a_0+a_1x+\dots$ wird integriert, indem man ihre Glieder integriert.

Man erkennt diese Eigenschaft der Potenzreihe noch auf ganz anderem Wege, nämlich als besonderen Fall des folgenden Satzes.

*Wenn die Funktionen $u_0, u_1, u_2, \dots$ (in infinitum) der endlichen Variablen $x$ endlich und stetig sind von $x=a$ bis $x=b$ und die unendliche Reihe*

$$g(x)=u_0+u_1+u_2+\dots$$

*daselbst gleichmässig konvergiert, so kann man $g(x)$ integrieren und erhält das Integral, indem man die Glieder der Reihe integriert* (Weierstrass).

Beweis: Nach Seite 174 ist die Funktion $g(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ stetig und mithin integrierbar. Setzt man

* Vergl. auch Harnack, Differential- und Integralrechnung S. 78 flg.

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = g_n(x), \quad g(x) = g_n(x) + \psi_n(x),$$

so gilt dasselbe von $g_n(x)$ und $\psi_n(x)$, und man hat:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g_n(x)\,dx + \int_a^b \psi_n(x)\,dx.$$

Unter $\varepsilon$ werde eine beliebig kleine positive Zahl verstanden und $n$ so gross angenommen, dass in dem ganzen Intervalle

$$\text{abs}\,\psi_n(x) < \frac{\varepsilon}{\text{abs}\,(b-a)}$$

ausfällt. Dann wird nach § 17 Seite 98:

$$\text{abs} \int_a^b \psi_n(x)\,dx < \varepsilon,$$

und man erhält demnach für $\lim n = \infty$:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim \int_a^b g_n(x)\,dx = \lim \left\{ \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx \right\},$$

d. i.

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots \text{ (in infinitum).}$$

Überhaupt *wenn die Funktionen* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *von* $x = a$ *bis* $x = b$ *integriert werden können, und die unendliche Reihe* $g(x) = u_0 + u_1 + \ldots$ *daselbst gleichmässig konvergiert, so kann man* $g(x)$ *integrieren und erhält:*

$$\int_a^b dx\, \Sigma u = \Sigma \int_a^b u\,dx.$$

Beweis: Der Voraussetzung gemäss sind die Funktionen $g_0(x)$, $g_1(x)$, ... integrierbar. Wird nun für die Funktion $g(x)$ ein Ausdruck $\omega$ in derselben Weise definiert, wie in § 17 die Summe $w$ für die Funktion $y$ definiert wurde, so kann man schreiben:

$$\omega = \theta + \eta,$$

wo $\theta$ und $\eta$ die entsprechende Bedeutung für resp. $g_1(x)$ und $\psi_1(x)$ besitzen. Ebenso wird man, wenn $h$ wie a. a. O. eingeführt und ausser $\omega$ noch ein zu dem nämlichen Werte von $h$ gehöriger analoger Ausdruck $\omega'$ hergestellt wird, $\omega'$ in zwei Teile $\theta'$, $\eta'$ zerlegen und erhalten:

$$\omega - \omega' = (\theta - \theta') + \eta - \eta'.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig angenommen. Wir wählen $\nu$ so gross, dass in dem ganzen Intervalle

$$\text{abs}\, \psi_\nu(x) < \frac{\varepsilon}{3\, \text{abs}\,(b - a)}$$

ist, und hierauf $h$ so klein, dass $\text{abs}\,(\theta - \theta') < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle zu $h$ gehörigen Werte von $\theta$ und $\theta'$; dann wird für dieses $h$:

$$\text{abs}\, \eta < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{abs}\, \eta' < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{abs}\,(\omega - \omega') < \varepsilon,$$

d. h. $\omega$ strebt einem endlichen Grenzwerte zu für $\lim h = 0$. Durch diese Betrachtung ist die Integrierbarkeit der Funktion $g(x)$ und folglich auch die der Funktionen $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, ... festgestellt, und man beweist, wie oben, dass das Integral

$$\int_a^b \psi_n(x)\, dx$$

für $\lim n = \infty$ dem Grenzwerte Null zustrebt.

## § 27. Reihenentwickelung der elementaren Funktionen.

Zu den in § 25 als Beispiele benutzten Potenzreihen wird man geführt, wenn man die elementaren Funktionen von einer Variablen nach positiven ganzen Potenzen der letzteren zu entwickeln sucht.

Nehmen wir zuerst diejenigen Funktionen, welche sich durch beständig konvergente Reihen darstellen lassen. Soll die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

die Summe $e^x$ ergeben, so muss $a_0 = 1$ und $e^x$ zugleich die Summe der abgeleiteten Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

sein. Hieraus folgt (Seite 177):

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad \ldots, \quad n a_n = a_{n-1},$$
$$n!\, a_n = a_0, \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

Dass die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

beständig konvergiert, ist schon bemerkt worden; sie stellt demnach für alle endlichen $x$ eine Funktion $y = f(x)$ dar, und man findet:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad f(x) \cdot f(-x) = 1$$

(§ 25 Seite 168), so dass $y$ fortwährend endlich und positiv bleibt, weiter (§ 15 Seite 86):

$$\frac{d \log y}{dx} = 1, \quad \log y = x, \quad y = e^x,$$

da $\log y$ mit $x$ verschwindet. Also ist bei allen endlichen $x$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

und insbesondere die Grundzahl der natürlichen Logarithmen

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots,$$

von welcher Hermite* bewiesen hat, dass sie keiner algebraischen Gleichung mit ganzen Koefficienten genügt.

Indem wir unter $a$ eine positive Zahl verstehen und $x \log a$ an Stelle von $x$ setzen, kommen wir zu der für alle endlichen $x$ giltigen Entwickelung:

$$a^x = 1 + \frac{\log a}{1} x + \frac{(\log a)^2}{1.2} x^2 + \frac{(\log a)^3}{1.2.3} x^3 + \dots$$

und schliessen für alle von Null verschiedenen $x$:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \log a + \frac{(\log a)^2}{1.2} x + \frac{(\log a)^3}{1.2.3} x^2 + \dots,$$

$$\log a = \lim \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{für} \quad \lim x = 0,$$

oder bei veränderter Bezeichnung ($x$ positiv):

$$\log x = \lim n \left( \sqrt[n]{x} - 1 \right) \quad \text{für} \quad \lim n = \infty.$$

Zugleich ergeben sich die folgenden Grenzwerte:

$$1 = \lim \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{für} \quad \lim x = 0, \quad 1 = \lim \frac{x-1}{\log x} \quad \text{für} \quad \lim x = 1,$$

$$1 = \lim \frac{\log(1+x)}{x} \quad \text{und} \quad a = \lim \frac{\log(1+ax)}{x} \quad \text{für} \quad \lim x = 0,$$

$$e^a = \lim (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \quad \text{für} \quad \lim x = 0,$$

* Sur la fonction exponentielle, Comptes rendus T. 77 (1873); auch in besonderem Abdruck Paris 1874.

wo $a$ jeden endlichen Wert annehmen darf, oder bei veränderter Bezeichnung:

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ für } \lim n = \infty$$

und insbesondere

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ für } \lim n = \infty.$$

Soll die unendliche Reihe $a_0 + a_1 x + \dots$ die Summe $\cos x$ ergeben, so muss $a_0 = 1$ sein und

$$\cos x = \cos(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \dots,$$

$$\sin x = -\frac{d \cos x}{dx} = -a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - 4a_4 x^3 - \dots,$$

$$\cos x = \frac{d \sin x}{dx} = -2a_2 - 2 \,.\, 3a_3 x - 3 \,.\, 4a_4 x^2 - \dots,$$

d. h. die Koefficienten aller ungeraden Potenzen müssen verschwinden, während

$$-2a_2 = a_0, \quad -3 \,.\, 4a_4 = a_2, \dots, \quad -(2n-1)\,2n\, a_{2n} = a_{2n-2},$$

$$(-1)^n (2n)!\, a_{2n} = a_0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

wird. Demgemäss sind die beständig konvergenten Reihen

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad z = -\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

aufzustellen. Da $\frac{dz}{dx} = y$ wird, so verschwinden die Differentiale

$$d(y \sin x - z \cos x) = \cos x\,(y\,dx - dz) + \sin x\,(dy + z\,dx),$$

$$d(y \cos x + z \sin x) = \cos x\,(dy + z\,dx) + \sin x\,(dz - y\,dx),$$

und die differentiierten Funktionen sind konstant:

$$y \sin x - z \cos x = 0, \quad y \cos x + z \sin x = 1.$$

Indem man nun diese Gleichungen in Bezug auf $y$ und $z$ auflöst, erhält man: $y = \cos x$, $z = \sin x$, also bei allen endlichen $x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Diese Reihen liefern Grenzwerte von einigen trigonometrischen Ausdrücken. Man findet für $\lim x = 0$:

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim \frac{1 - \cos x}{x} = 0, \quad \lim \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim \frac{x}{\arcsin x} = 1, \quad \lim \frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1, \quad \lim \frac{x}{\arccos(1-x)} = 0,$$

wo die Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen werden müssen. Man sagt deshalb, dass unendlich kleine Bogen ihrem Sinus und ihrer Tangente gleich sind.

Um die bei beliebigen (endlichen) Werten von $m$ für alle $x$ zwischen $-1$ und $+1$ konvergente Binomialreihe

$$1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots$$

zu summieren, kann man die im vorigen Paragraphen erwähnte Eigenschaft der bei festem $m$ durch die Reihe dargestellte Funktion $y$ von $x$ benutzen, wonach

$$\frac{dy}{dx} = m \left\{ 1 + \binom{m-1}{1} x + \binom{m-1}{2} x^2 + \dots \right\}$$

und mithin $(1+x)\,dy = my\,dx$, da

$$(1+x)\left\{1 + \binom{m-1}{1} x + \binom{m-1}{2} x^2 + \dots\right\} = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots$$

Die Funktion $y$ nimmt nur positive Werte an; denn bei $0 > m > -1$ nehmen die Beträge der Glieder fortwährend ab, das Zeichen ist entweder bei allen Gliedern dasselbe, oder es wechselt von Glied zu Glied (§ 25 Seite 161); auf diesen Fall kann man aber jeden anderen zurückführen, indem man $y$ hinreichend oft mit $1 + x$ multipliciert oder dividiert. Wir dürfen daher schreiben:

$$\frac{d \log y}{dx} = \frac{m}{1+x} = m \frac{d \log(1+x)}{dx}, \quad \log y = m \log(1+x),$$

da $y = 1$ bei $x = 0$. Versteht man also unter $(1+x)^m$ einen reellen positiven Wert, so gilt zunächst für abs $x < 1$ die Entwickelung:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots$$

Die Reihe konvergiert aber (abgesehen davon, dass sie für alle positiven ganzen $m$ nur $m+1$ Glieder umfasst) für $m > -1$ auch an der Stelle $x = 1$, für $m > 0$ auch an der Stelle $x = -1$; wegen der Stetigkeit der Potenzreihe erhält man daher noch:

$$2^m = 1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\dots \quad \text{für} \quad m > -1,$$

$$0 = 1-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}+\dots \quad \text{für} \quad m > 0.$$

Für negative $m = -\mu$ nimmt die Binomialreihe folgende Form an:

$$\frac{1}{(1+x)^\mu} = 1-\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}x^2-\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}x^3+\dots$$
$$= 1-\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu+1}{2}x^2-\binom{\mu+2}{3}x^3+\dots;$$

ist $\mu$ eine ganze Zahl, so sind alle Koefficienten ganze Zahlen.

Wir notieren die besonderen Resultate für $m = \pm\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2.4}x^2+\frac{1.3}{2.4.6}x^3-\dots(-1<x\leq 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\dots(-1<x<1).$$

Aus dem ersteren folgt für $x = -1$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\dots = 1.$$

Durch Vergleichung mit dieser Reihe ergiebt sich die Konvergenz der folgenden:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\dots$$

Die Glieder der Binomialreihe sind nicht bloss von $x$ abhängig, sondern auch von $m$; untersuchen wir daher, ob die Reihe auch dann gleichmässig konvergiert, wenn $m$ bei festem $x$ sich verändert. Es werde zur Abkürzung

$$\binom{m}{n+1}x^{n+1}+\binom{m}{n+2}x^{n+2}+\dots = \psi_n$$

gesetzt. Durchläuft $m$ zuerst ein von ganzen Zahlen begrenztes Intervall positiver Werte $(p\dots p+1)$, so kann man abs $x<1$ nehmen und erhält für $n>p$:

$$\operatorname{abs}\psi_n < (-1)^{n-p}\left\{\binom{m}{n+1} - \binom{m}{n+2} + \binom{m}{n+3} - \cdots\right\}$$
$$= (-1)^{n-p}\left\{1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{m}{n}\right\}$$
$$= (-1)^{n-p}\binom{m-1}{n};$$

beachtet man nun, dass für $p < m < p+1$:

$$(-1)^{n-p}\binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-p).(p+1-m)(p+2-m)\ldots(n-m)}{n!},$$
$$0 \leq (m-1)(m-2)\ldots(m-p) < p(p-1)\ldots 1,$$
$$0 \leq (p+1-m)(p+2-m)\ldots(n-m) < 1.2\ldots(n-p),$$

so findet man:

$$\operatorname{abs}\psi_n < \frac{p!(n-p)!}{n!}, \quad \operatorname{abs}\frac{1}{\psi_n} > \binom{n}{p},$$

wo $\binom{n}{p}$ für $\lim n = \infty$ dem Grenzwerte $+\infty$ zustrebt; man kann also die Zahl $n$ so gross wählen, dass die Beträge der Grössen $\psi_n$, $\psi_{n+1}$, $\psi_{n+2}, \ldots$ für alle betrachteten $m$ unter eine beliebig gegebene Zahl herabsinken, d. h. die Reihe ist für diese $m$ gleichmässig konvergent. Durchläuft $m$ zweitens ein Intervall negativer Werte von $0$ bis $-\mu$, wo $\mu < 1$, so kann man $-1 < x < 1$ nehmen; für jedes negative $x$ ist dann:

$$\operatorname{abs}\psi_n = \psi_n < \binom{-\mu}{n+1}x^{n+1} + \binom{-\mu}{n+2}x^{n+2} + \ldots,$$

dagegen für jedes positive $x$ (§ 25 Seite 161):

$$\operatorname{abs}\psi_n < (-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}x^{n+1} < (-1)^{n+1}\binom{-\mu}{n+1},$$

wo $\binom{-\mu}{n+1}$ für $\lim n = \infty$ dem Grenzwerte Null zustrebt; also ist die Reihe auch für diese $m$ gleichmässig konvergent. Durchläuft $m$ endlich ein Intervall negativer Werte von $0$ bis $-\mu$, wo $\mu > 1$, so darf man nur $\operatorname{abs} x < 1$ nehmen; man hat dann:

$$\operatorname{abs}\psi_n < (-1)^{n+1}\binom{-\mu}{n+1}\xi^{n+1} + (-1)^{n+2}\binom{-\mu}{n+2}\xi^{n+2} + \ldots,$$

wo $\xi = \operatorname{abs} x$ sein soll, und gelangt zu demselben Resultat wie vorhin.

*Variiert also $m$ zwischen irgend welchen endlichen Grenzen, und wird der Grösse $x$ ein fester Wert beigelegt, für welchen die Binomialreihe bei allen in Betracht gezogenen Werten von $m$ konvergiert, so ist die Reihe gleichmässig konvergent.*

Es erübrigt noch, die Entwickelungen des Logarithmus, des Arcustangens und des Arcussinus zu geben. Da $\log x$ unendlich wird bei $x = 0$, so kann $\log x$ nicht nach positiven ganzen Potenzen von $x$ entwickelt werden; man nimmt daher

$$\log(a + x) \quad \text{d. i.} \quad \log a + \log\left(1 + \frac{x}{a}\right),$$

wo $a$ positiv sein muss, also am einfachsten $\log(1 + x)$. Die Reihen für $\log(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$ und $\arcsin x$ können aus den Derivierten

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots,$$

welche nur bei abs $x < 1$ konvergieren, hergeleitet werden. Nach Seite 179 kommt, da die drei darzustellenden Funktionen mit $x$ verschwinden:

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

zunächst nur für $-1 < x < 1$. Diese Bedingung ist jedoch in

$$-1 < x < 1$$

zu erweitern. Denn auf Seite 185 wurde die Konvergenz der dritten Reihe für $x = 1$ bewiesen, die der beiden ersten für $x = 1$ war schon früher (§ 25) erkannt worden; die beiden letzten Reihen konvergieren auch für $x = -1$, während die erste an dieser Stelle die Summe $-\infty$ giebt; es bleibt also nur noch zu berücksichtigen, dass $\log 0 = -\infty$ ist, während bei $x = \pm 1$ sowohl die Funktionen $\operatorname{arctg} x$ und $\arcsin x$ als auch die zu ihrer Darstellung gefundenen Reihen Stetigkeit besitzen.

Die Funktionen arctg $x$ und arcsin $x$ sind unendlichvieldeutig. Die obigen Reihen liefern für die erstere den Wert aus dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{4} \dots \frac{\pi}{4}\right)$, für die letztere den Wert aus dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2} \dots \frac{\pi}{2}\right)$. Daher ergeben sich zur Berechnung der Zahl $\pi$ die konvergenten Reihen:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \dots$$

Bei abs $x > 1$ sind die obigen Reihen unbedingt divergent.

## Bemerkung zu Seite 13.

Zu dem auf Seite 13 gegebenen Citat ist noch hinzuzufügen, dass Herr F. Klein bereits in einem Aufsatze „Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve“ (Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, 8. December 1873) die Ungenauigkeit der geometrischen Begriffe zur Sprache gebracht und die sich daraus ergebenden Konsequenzen bezüglich der analytischen Darstellung der ebenen Kurven näher entwickelt hat.